

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Luka Marčič

**KVANDLI, ALGEBRAIČNE VOZELNE
INVARIANTE**

Delo diplomskega seminarja

Mentor: doc. dr. Sašo Strle

Ljubljana, 2023

Kazalo

1	Uvod	7
2	Osnove teorije vozlov	7
2.1	Definicija vozla	7
2.2	Ekvivalenca vozlov	9
2.3	Vozelni diagrami	10
2.4	Reidemeistrove poteze	14
2.5	Ekvivalenca vozelnih diagramov	15
2.6	Orientirani vozli	19
2.7	Povezana vsota	21
2.8	Pravozli	21
2.9	Vozelne invariante	23
3	Kvandli	23
3.1	Definicija operacij	23
3.2	Uskladitev operacij z Reidemeistrovimi potezami	24
3.3	Definicija kvandlov	25
3.4	Alexandrovi kvandli	26
3.5	Dualni kvandli	27
4	Uporaba kvandlov	28
4.1	Foxov izrek o tribarvanju	28
4.2	Barvanje s kvandli	33
4.3	Barvanje z Alexandrovimi kvandli	34
4.4	Fundamentalni kvandel vozla	38
	Kazalo slik in tabel	39
	Literatura	43

Kvandli, algebraične vozalne invariante

POVZETEK

V diplomskem delu predstavimo osnove teorije vozlov, nato pa podrobneje predstavimo algebraične strukture imenovane kvandli in kako lahko kvandle uporabimo za reševanje problemov v teoriji vozlov.

Quandles, algebraic knot invariants

ABSTRACT

In this diploma we introduce the basics of knot theory and then continue with a more thorough presentation of algebraic structures called quandles and how quandles can be used to solve problems in knot theory.

Math. Subj. Class. (2020): 57K10, 57K12

Ključne besede: vozli, kvandli

Keywords: knots, quandles

1 Uvod

Vozle iz vsakdanjega življenja poznamo v kontekstu zavezovanja vezalk na čevljih, privezovanja ladij v pristaniščih, varovanju plezalca pri alpinizmu, izdelovanju škripcov in nasploh kadarkoli moramo pritrditi karkoli vrvi podobnega. Vozli v matematičnem smislu se od teh rahlo razlikujejo, vendar to ne pomeni, da se z njimi ne srečujemo vsak dan, zavedno ali nezavedno. Teorija vozlov je matematično področje, ki te vozle preučuje.

S teorijo vozlov kot matematičnim področjem se je prvi ukvarjal škotski fizik Peter G. Tait. Prvi članek o tematici je objavil leta 1877. To je storil pod takrat razširjenim prepričanjem, da so atomi sestavljeni iz iste homogene materije, ki je zavozlana v prostoru. Različni atomi bi tako naj imeli različne lastnosti zaradi različnih vozlov, ki jih sestavljajo. Idejo je prvi predstavil William Thomson, bolje znan kot Lord Kelvin, z njo pa se je ukvarjal tudi J. J. Thomson, preden je eksperimentalno odkril obstoj elektronov in jo s tem dokončno zavrgel. P. G. Tait je v svojem delu poskusil napisati seznam vseh preprostejših vozlov. Četudi se je teorija o atomih, pod katero je opravljal delo, izkazala za neresnično, se je teorija vozlov uveljavila za vejo matematike in z njo so se začeli ukvarjati tudi drugi.

Področje se je bistveno razvilo v začetku 20. stoletja, ko je razvoj v formalni matematiki odprl nove možnosti za njegovo preiskovanje. Tako so matematiki kot so M. Dehn, J. Alexander in K. Reidemeister področje dopolnili z metodami iz drugih vej matematike. Druga polovica 20. stoletja je prinesla nov razvoj in teorija vozlov je dobila podobo, pod katero jo sedaj poznamo.

Omembe vredno je tudi dejstvo, da se teorija vozlov uporablja v mnogih drugih vedah. Najbrž najbolj direkten primer uporabe teorije vozlov izhaja iz biologije. Izkaže se namreč, da je veliko organskih spojin v našem telesu zavozlanih. Biologi tako uporabljajo metode iz teorije vozlov za boljše razumevanje delovanja našega telesa.

V diplomskem delu si bomo ogledali matematične osnove teorije vozlov, nekaj problemov iz tega področja in rahlo nekonvencionalen način reševanja teh problemov: preko kvandlov, algebraičnih struktur z binarno operacijo.

2 Osnove teorije vozlov

V tem poglavju bomo obravnavali vso potrebno matematično formulacijo, da lahko korektno zastavimo in rešimo probleme, s katerimi se srečamo v teoriji vozlov. Začeli bomo z osnovnimi definicijami potem pa predelali še nekaj relevantnih konceptov.

2.1 Definicija vozla

Vozle v kontekstu klasične teorije vozlov v matematiki si običajno predstavljamo kot gladke sklenjene krivulje v prostoru $\mathbb{R}^3$. Formalno lahko to zapišemo kot vložitve

$$S^1 \hookrightarrow S^3,$$

kjer je S^1 krožnica in S^3 enotska 3-sfera. Praviloma S^3 nadomestimo z $\mathbb{R}^3$, saj je obravnavanje tako lažje. Teorija vozlov torej preučuje lastnosti sklenjenih krivulj v prostoru.

Problem pri taki definiciji nastopi, ko želimo teorijo vozlov formalizirati. Če bi vozle res definirali kot sklenjene krivulje v prostoru, bi bilo z njimi težko upravljati. Taka definicija namreč dopušča cel kup potencialnih zapletov: krivulja je lahko zelo zapletena, lahko se prepleta na nejasne načine ali pa celo nima končne dolžine. Četudi zahtevamo, da je krivulja gladka, bi naleteli na cel kup potencialnih zapletov. Do problema tako pristopimo drugače.

Definicija 2.1 ([5]). *Vozel* K je enostavna sklenjena kosoma linearna krivulja v prostoru $\mathbb{R}^3$. Bolj natančno, vozelo podamo s končnim zaporedjem točk v prostoru:

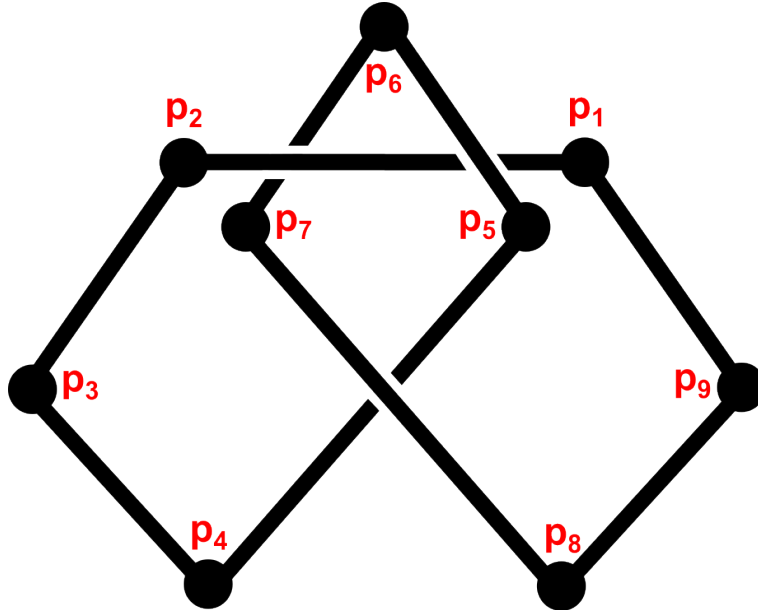
$$(p_1, \dots, p_n); p_i \in \mathbb{R}^3 \forall i \in \{1, \dots, n\}; n \in \mathbb{N},$$

ki določajo daljice $p_i p_{i+1}, i = 1, \dots, n-1$ in daljico $p_n p_1$. Te točke imenujemo *vozlišča* vozla in na njih gledamo ciklično: $p_{n+1} = p_1$. Veljati mora:

1. Različni daljici $p_i p_j$ in $p_m p_n$ se sekata natanko tedaj, ko si delita vozlišče (torej npr. $p_j = p_n$).
2. Nobene tri zaporedne točke p_i, p_{i+1}, p_{i+2} niso kolinearne (sicer lahko vmesno, torej p_{i+1} , izpustimo).

Čeprav je definicija na prvi pogled zelo oddaljena od prvotne intuitivne ideje tega, kaj je vozelo, se izkaže, da v resnici gre za isto stvar! Vsako krivuljo se namreč da poljubno natančno opisati s končno mnogo linearnimi odseki. Če želimo krivuljo opisati bolj natančno, preprosto izberemo več točk. Za lažjo predstavo si oglejmo primer.

Primer 2.2. Primer preprostega vozla je deteljica. Na sliki 1 je definirana z zaporedjem devetih točk.



Slika 1: Deteljica.

◇

2.2 Ekvivalenca vozlov

Ko enkrat definiramo, kaj je voz, se naravno pojavi vprašanje, kaj pomeni, da sta si vozla enaka oziroma različna. Pojma enakosti tu seveda ne dojemamo dobesedno. V resnici želimo ugotoviti, kdaj sta si dva vozla dovolj podobna, da delita določene lastnosti. Intuitivno si to predstavljamo kot vprašanje, kdaj sta dva vozla dovolj podobna, da iz enega pridemo do drugega, ne da bi voz, ki ga odvozimo ali strgamo. V ta namen definiramo pojem deformacije.

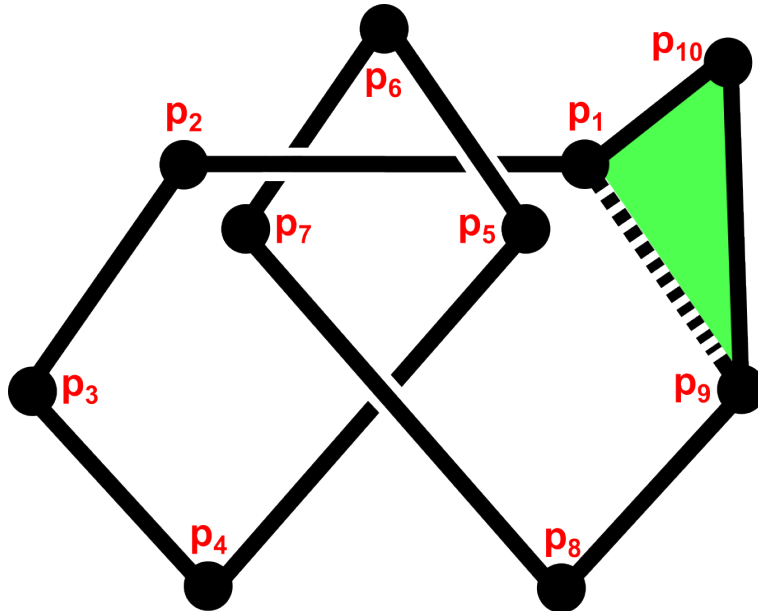
Definicija 2.3 ([5]). Vozel J je *deformacija* vozla K , če je eden od njiju določen z zaporedjem točk $(p_1, \dots, p_n)$, drugi pa z zaporedjem točk $(p_1, \dots, p_n, p_{n+1})$, kjer

1. p_n, p_{n+1} in p_1 niso kolinearne.
2. Trikotnik določen s (p_1, p_n, p_{n+1}) seka prvotni voz samo v daljici p_1p_n .

Če pri deformaciji dobimo tri zaporedne kolinearne točke p_i, p_{i+1}, p_{i+2} , lahko vmesno izpustimo. Deformacijo lahko seveda izvedemo tudi na drugi daljici kot p_1p_n .

Pogoj, da se trikotnik, določen s (p_1, p_n, p_{n+1}) , ne seka s prvotnim vozom, nam zagotovi, da z deformacijo vozla ne bomo spremenili. Deformacijo si tako lahko predstavljamo, kot da bi vzeli neki del vozla in ga raztegnili, ne da bi ob tem zadeli kak drug del vozla.

Primer 2.4. Na sliki 2 je primer deformacije deteljice iz slike 1. Trikotnik, obarvan z zeleno, ki je določen s točkami p_1, p_9 in p_{10} , ne sme sekati prvotnega vozla nikjer razen na daljici p_1p_9 .



Slika 2: Deformacija deteljice.

◇

Sedaj, ko nam je jasen en korak spremembe vozla, ki vozla ne spremeni – vsaj ne na način kot dojemamo vozle – se lahko lotimo koncepta enakosti dveh vozlov.

Definicija 2.5 ([5]). Vozla K in J sta *ekvivalentna*, če obstaja zaporedje vozlov $K = K_0, K_1, \dots, K_n = J$, kjer je za vsak i vozlel K_{i+1} deformacija vozla K_i . Ekvivalenca je očitno ekvivalenčna relacija in lahko torej vozle dojemamo kot ekvivalenčne razrede.

Dva vozla sta torej ekvivalentna, ko lahko enega postopoma deformiramo v drugega. Intuitivno si to lahko predstavljamo, kot da lahko vozlel premikamo v prostoru in dele njega raztezamo ali krčimo, nikoli pa ga ne smemo pretrgati ali del vozla potisniti skozi drug del vozla.

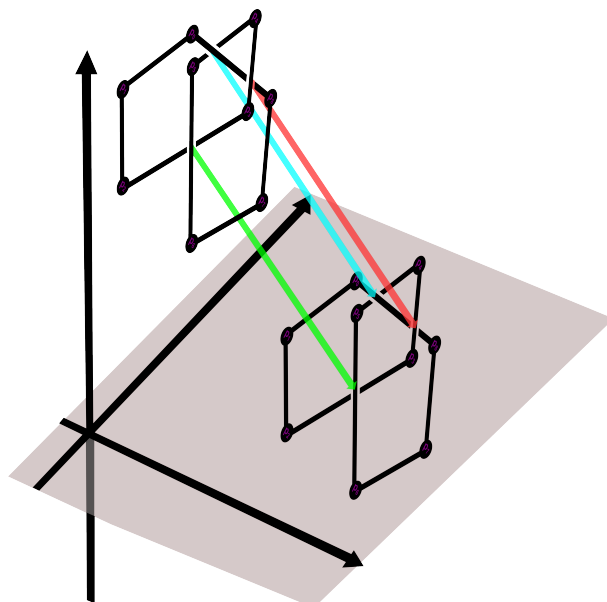
2.3 Vozelni diagrami

Ob nadaljnjem razmišljanju o vozlih se izkaže, da se je z njimi zelo težko ukvarjati v prostoru. Zato vozle v namen poenostavitve problema projiciramo na (poljubno) ravnino. Seveda ne ustreza vsaka projekcija.

Definicija 2.6 ([5]). Projekcija vozla na ravnino je *regularna*, če velja:

1. Nobene tri različne točke na vozlu se ne slikajo v isto točko na ravnini.
2. Nobeno vozlišče vozla se ne slika v isto točko na ravnini kot katerakoli druga točka iz vozla.

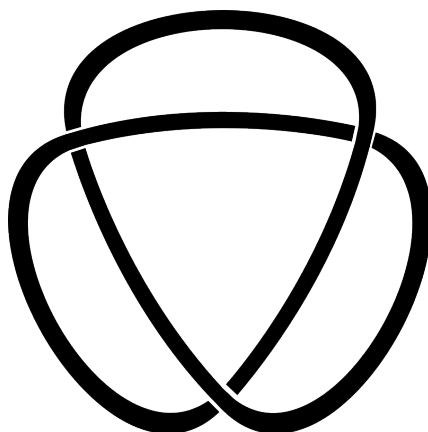
Primer 2.7. Slika 3 je primer regularne projekcije deteljice (slika 1) na neko ravnino.



Slika 3: Projekcija deteljice.

◇

Primer 2.8. Na sliki 4 je primer diagrama deteljice.



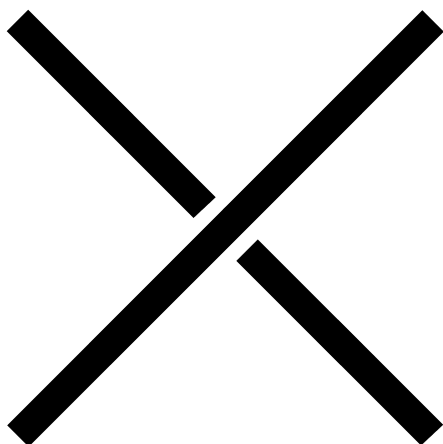
Slika 4: Diagram deteljice.



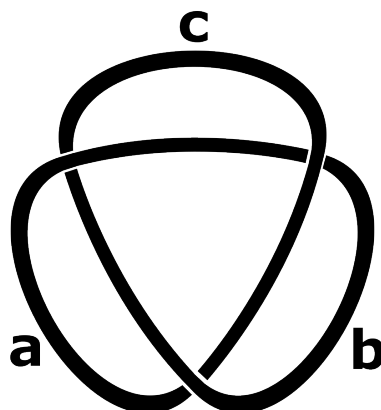
Pri vseh netrivialnih primerih bo slika regularne projekcije vozla vsebovala točke, v katere se slikata dve točki vozla. Na slikah zaradi tega uporabljamo naslednjo terminologijo.

Definicija 2.9. Točke v ravnini, v katere se slikata dve različni točki iz vozla, imenujemo *križišča*. V vsakem križišču na projekciji nakažemo, kateri del vozla gre spodaj (oziroma kateri del vozla je bil prej bližje ravnini, na katero projiciramo). To storimo tako, da del vozla, ki gre spodaj, pred križiščem rahlo prekinemo, kot je prikazano na sliki 5. Tako označeni skici pravimo *diagram*.

Del vozla, ki gre zgoraj, imenujemo *nadvoz*, del vozla, ki pa gre spodaj, pa *podvoz*. Delu vozla med dvema zaporednima podvozoma pravimo *lok*. Loke ponavadi označimo, kot na sliki 6.



Slika 5: Križišče.



Slika 6: Deteljica z označenimi loki.

Regularne projekcije nam zagotovijo, da se vozle, ki ga projiciramo, slika na ravnino na tak način, da je iz projekcije jasno razvidno, kateri vozle smo slikali.

Naravno se nam porodi vprašanje o obstoju takih projekcij ter o projekcijah ekvivalentnih vozlov.

Izrek 2.10 ([5]). *Naj bo vozlel K definiran z zaporedjem točk $(p_1, \dots, p_n)$ in naj za ta vozlel ι ni regularna projekcija. Potem za vsak $\epsilon > 0$ obstaja vozlel K' , definiran z zaporedjem točk $(q_1, \dots, q_n)$, za katerega velja:*

1. *Razdalja med p_i in q_i je manjša od ϵ za vsak i .*
2. *K' je ekvivalenten K .*
3. *Projekcija ι je regularna za K' .*

Dokaz. V dokazu bomo postopoma odpravili problematične točke.

Naj imamo vozlel K definiran s $(p_1, \dots, p_n)$ in projekcijo ι na ravnino, ki za vozlel K ni regularna. Naj bo dan še poljuben $\epsilon > 0$.

Če obstaja takšno vozlišče p_i , da ga projekcija ι slika v isto točko na diagramu kot kako drugo točko iz vozla K , potem obstaja točka p'_i , ki je od p_i oddaljena manj kot ϵ , trikotnik p_i, p'_i, p_{i+1} seka vozlel K le v daljici $p_i p_{i+1}$, trikotnik p_{i-1}, p_i, p'_i ga seka le v daljici p_{i-1}, p_i , njena slika z ι pa ne leži na sliki vozla K . Taka točka res obstaja, saj je tako vozlel K kot njegova slika z ι unija končno mnogih daljic, ki se jim lahko izognemo tako, da zagotovimo zgoraj naštetje pogoje. Tako dobljen vozlel, določen s točkami $(p_1, \dots, p_{i-1}, p'_i, p_{i+1}, \dots, p_n)$, je seveda ekvivalenten prvotnemu vozlu K . Na enak način zamenjamo vsa problematična vozlišča in dobimo vozlel Q , za katerega je drugi pogoj iz definicije regularne projekcije izpolnjen.

Če se tri različne točke iz vozla Q slikajo v isto točko na diagramu, vemo, da vse tri pripadajo daljicam iz vozla, saj smo v prvem koraku dokaza že zamenjali vsa vozlišča, ki se slikajo v isto točko na diagramu kot kakšna druga točka iz vozla. Recimo torej, da pripadajo daljicam $p_i p_{i+1}$, $p_j p_{j+1}$ in $p_k p_{k+1}$. Tedaj za enega izmed teh vozlišč, recimo p_i , obstaja točka p'_i , ki je od njega oddaljena manj kot ϵ (če je bilo to vozlišče že zamenjano v prvem koraku dokaza, potem mora biti seveda ta točka oddaljena manj kot ϵ od prvotnega vozlišča), tako da trikotnik p_i, p'_i, p_{i+1} ne seka vozla Q drugje kot v daljici p_i, p_{i+1} , trikotnik p_{i-1}, p_i, p'_i ne seka vozla Q drugje kot v daljici p_{i-1}, p_i , hkrati pa se nobena točka iz daljice p'_i, p_{i+1} ne slika v isto točko na diagramu kot dve drugi točki iz vozla. Taka točka res obstaja, saj sta tako kot prej vozlel Q in njegova projekcija z ι uniji končno mnogo daljic. Tako dobimo vozlel, ekvivalenten Q , določen s točkami $(p_1, \dots, p_{i-1}, p'_i, p_{i+1}, \dots, p_n)$. Postopek ponovimo za vsak primer, kjer se tri točke iz vozla Q slikajo v isto točko na diagramu.

Dobljen vozlel je vozlel K' , ki je ekvivalenten K , definiran pa je s $(q_1, \dots, q_n)$, kjer je za vsak i razdalja med p_i in q_i manjša od ϵ , ι pa je zanj regularna projekcija. K' tako zadostuje zahtevam našega izreka. $\square$

Izrek 2.11 ([5]). *Naj bo vozlel K definiran z zaporedjem točk $(p_1, \dots, p_n)$ in naj obstaja neka regularna projekcija ι tega vozla na (dano) ravnino. Obstaja tak $\epsilon > 0$, da za vsak vozlel K' , definiran z zaporedjem točk $(q_1, \dots, q_n)$, za katere je za vsak i razdalja med p_i in q_i manjša od ϵ , velja:*

1. *K' je ekvivalenten K .*
2. *ι je regularna projekcija za K' .*

Dokaz. Naj imamo vozlel K definiran s $(p_1, \dots, p_n)$ in projekcijo na ravnino ι , ki je za K regularna.

Začnimo z vozliščem p_1 . Obstaja neka razdalja l_1 , za katero je za vsako p'_1 , $|p_1 - p'_1| < l_1$, vozlel $(p'_1, p_2, \dots, p_n)$ ekvivalenten vozlu K . Ta razdalja obstaja, saj je potrebna dovolj velika razdalja med p_1 in p'_1 , da eden izmed trikotnikov p_1, p'_1, p_2 ali p_1, p'_1, p_n seka prvotni vozlel še kje drugje kot v daljicah, ki jih deli. Potem za p_2 obstaja neka razdalja l_2 , za katero je za vsako p'_2 , $|p_2 - p'_2| < l_2$, vozlel $(p'_1, p'_2, p_3, \dots, p_n)$ ekvivalenten vozlu $(p'_1, p_2, \dots, p_n)$ in posledično tudi vozlu K za vse p_1 , $|p_1 - p'_1| < l_1$. Ta razdalja obstaja po istem razmisleku kot za p_1 . Postopek nadaljujemo in na vsakem koraku upoštevamo vse prejšnje potencialne izbire p'_i , za katere velja $|p_i - p'_i| < l_i$, dokler ne dobimo vozla $(p'_1, \dots, p'_n)$, ki je ekvivalenten prvotnemu vozlu K . Dobimo tudi razdalje $\{l_i\}_{i=1}^n$.

Prav tako za vozlišče p_1 obstaja neka razdalja L_1 , za katero je za vsako p'_1 , $|p_1 - p'_1| < L_1$, ι regularna preslikava za vozlel $(p'_1, p_2, \dots, p_n)$. Taka razdalja obstaja, saj je potrebna dovolj velika razdalja med p_1 in p'_1 , da ali ι slika p'_1 v isto točko kot neko drugo točko iz vozla ali ι slika eno izmed daljic p_n, p'_1 ali p'_1, p_2 na neko drugo vozlišče ali pa slika eno izmed prej omenjenih daljic na način, da se v neko točko na ravnini slikajo tri različne točke iz vozla, torej da ι ni več regularna preslikava za novi vozlel. Potem tako kot prej za p_2 obstaja neka razdalja L_2 , za katero je za vsako p'_2 , $|p_2 - p'_2| < L_2$, ι regularna preslikava za vozlel $(p'_1, p'_2, p_3, \dots, p_n)$ za vse p_1 , $|p_1 - p'_1| < L_1$. Ta razdalja obstaja po istem razmisleku kot za p_1 . Postopek nadaljujemo in na vsakem koraku upoštevamo vse prejšnje potencialne izbire p'_i , za katere velja $|p_i - p'_i| < L_i$, dokler ne dobimo vozla $(p'_1, \dots, p'_n)$, za katerega je ι regularna preslikava. Dobimo razdalje $\{L_i\}_{i=1}^n$.

Sedaj lahko definiramo

$$\epsilon := \frac{\min(\{l_i\}_{i=1}^n \cup \{L_i\}_{i=1}^n)}{2}.$$

Ta ϵ zadošča pogojem našega izreka. □

Prvi izrek nam pove, da če za vozlel neka projekcija ni regularna, obstaja njemu ekvivalenten vozlel, katerega vozlišča so poljubno blizu vozliščem prvotnega vozla, za katerega je ta projekcija regularna.

Drugi izrek nam pove, da če ima neki vozlel regularno projekcijo, potem so vsi vozli, katerih vozlišča so dovolj blizu vozliščem prvotnega vozla, temu vozlu ekvivalentna in je ta projekcija za njih prav tako regularna.

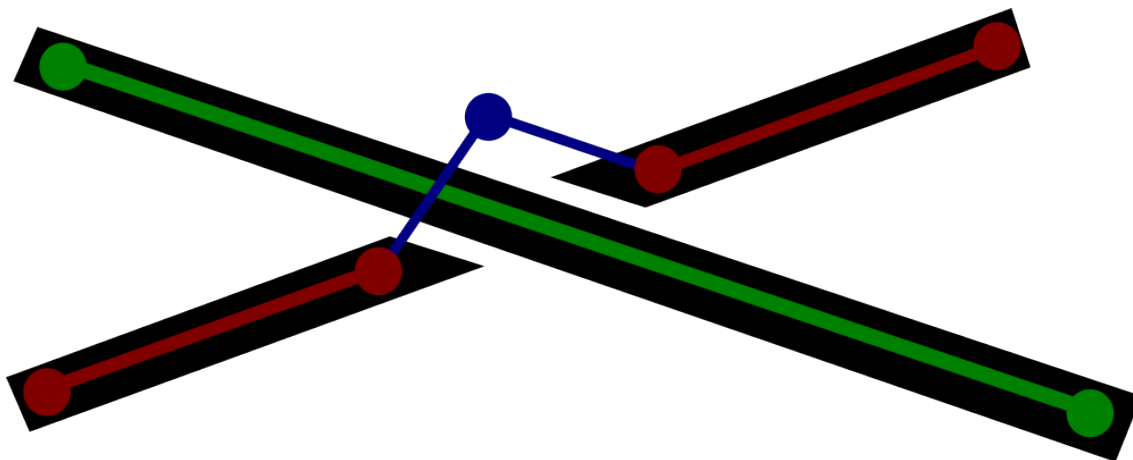
Oglejmo si še en izrek:

Izrek 2.12 ([5]). *Če imata vozla K in J za regularno projekcijo ι enak diagram, sta ekvivalentna.*

Dokaz. Naj bosta dana vozla K in J ter naj bo ι regularna projekcija, ki oba vozla slika v isti diagram.

Z nekaj preprostimi deformacijami lahko oba vozla premaknemo do diagrama tako, da vozla z izjemo majhnih okolice križišč ležita na projekcijski ravnini (pri tem dodamo dodatna vozlišča ob križiščih, da je premik na ravnino res kar se da eksakten – slika 7). Ker imata vozla enak diagram, se ujemata na vseh točkah razen tistih

blizu križišč, le te pa lahko z deformacijami premaknemo eno v drugo. Dobimo zaporedje deformacij med vozlova, torej sta vozla ekvivalentna.



Slika 7: Vozel, premaknjen na ravnino z diagramom.

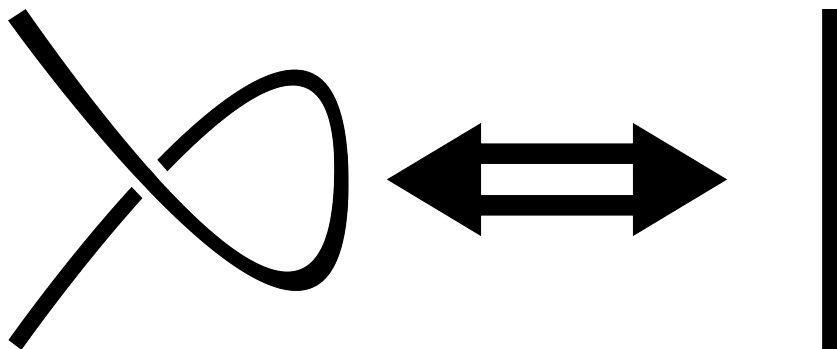
Na sliki 7 črni črti predstavljata dva loka diagrama, rdeči in zelena daljica ter točke predstavljajo vozlišča ter daljice vozla na ravnini, modri daljici in točka pa predstavljajo tisti del vozla nad križiščem, ki ne leži v ravnini (pri tem seveda vozlišče ni direktno nad spodnjim delom vozla, saj je projekcija regularna). $\square$

Z izrekom potrdimo, da so diagrami res smiselni način obravnave vozlov, saj isti diagram ne more predstavljati dveh vozlov, ki nista ekvivalentna.

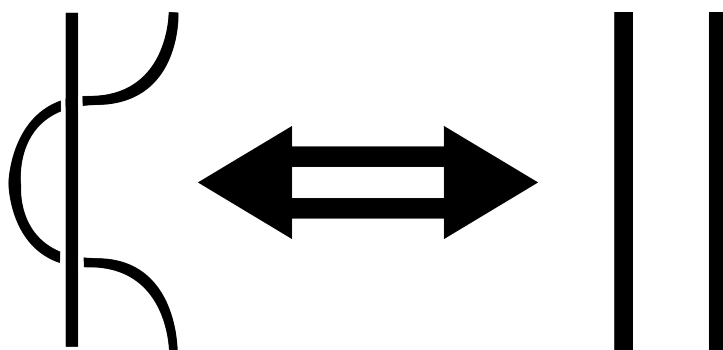
2.4 Reidemeistrove poteze

Sedaj bi želeli idejo ekvivalence vozlov razširiti na vozalne diagrame. V ta namen poiščemo vse možne spremembe na vozelnih diagramih, ki se ujemajo z deformacijami vozlov. Te spremembe imenujemo Reidemeistrove poteze. Izvajamo jih postopoma na lokih in križiščih vozelnih diagramov.

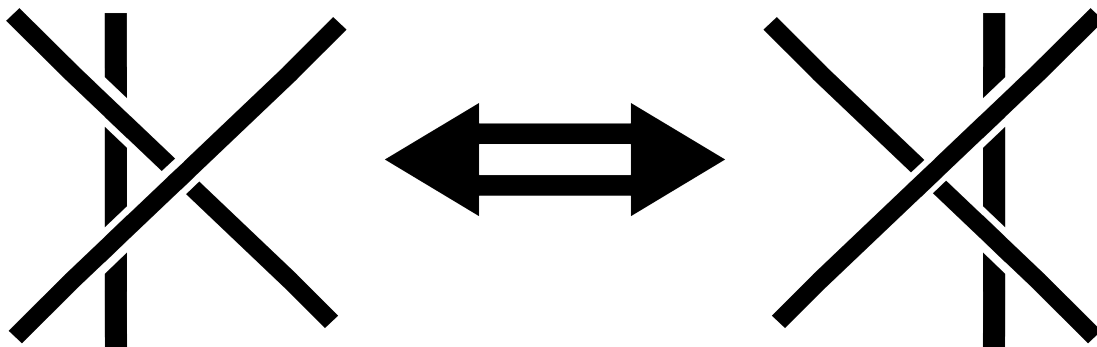
Definicija 2.13. *Reidemeistrove poteze so:*



Slika 8: Prva Reidemeistrova poteza.



Slika 9: Druga Reidemeistrova poteza.



Slika 10: Tretja Reidemeistrova poteza.

Pri tem bi pri prvi potezi zanko na loku vozla lahko obrnili tudi v drugo smer.

2.5 Ekvivalenca vozelnih diagramov

Ostane nam seveda še dolžnost, da pokažemo, da se Reidemeistrove poteze res skladajo z vsemi možnimi deformacijami na vozlih.

V pomoč nam bo prišel naslednji pojem.

Definicija 2.14. *Ravninska izotopija* na ravnini Σ je zvezna funkcija

$$\Gamma : \Sigma \times [0, 1] \rightarrow \Sigma,$$

ki je homeomorfizem ravnine Σ za vsak t .

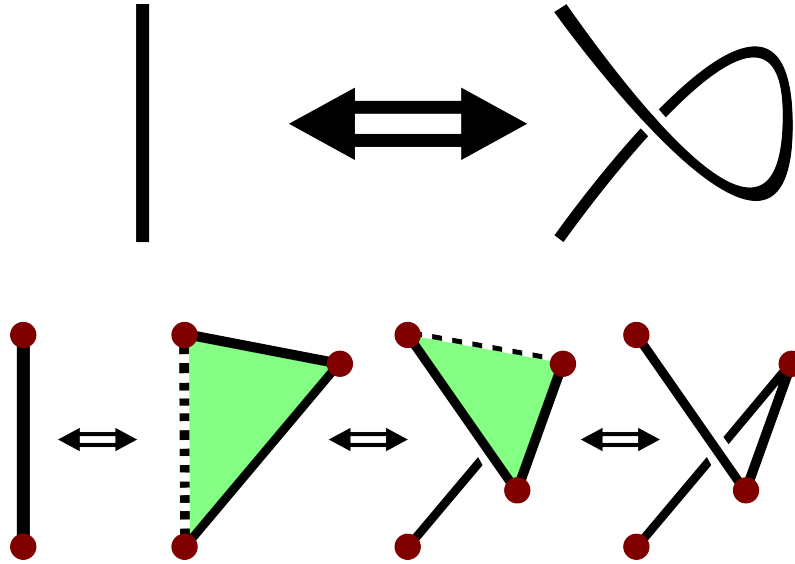
Preprosta primera ravninske izotopije sta razteg in rotacija ravnine. Rezultate take izotopije na vozelnem diagramu, ki leži na ravnini, si lahko predstavljamo kot homeomorfizem ravnine, ki ga dobimo z zaporedno uporabo homeomorfizmov, ki premikajo le točke v okolici enega trikotnika na ravnini, in sicer tako, da eno stranico premaknejo na unijo preostalih dveh ter ustrezno premaknejo bližnje točke. Tako si lahko predstavljamo ravninske izotopije kot analog za deformacije vozlov, ki na diagramu za dano projekcijo spremenijo le nek lok, ne pa križišč.

Sedaj lahko formuliramo naslednji izrek.

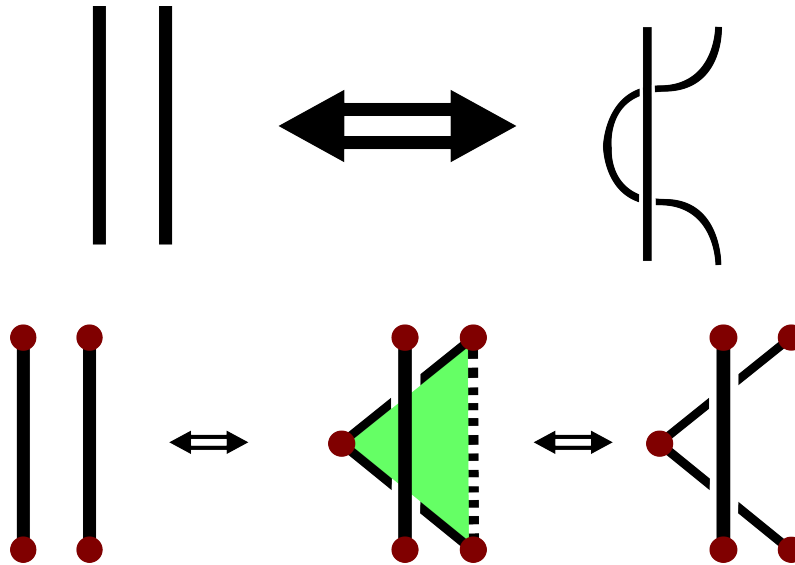
Izrek 2.15 ([5]). *Vozla K in J sta ekvivalentna natanko tedaj, ko lahko iz diagrama enega pridemo do diagrama drugega z zaporedjem Reidemeistrovih potez in ravninskimi izotopijami diagrama.*

Dokaz. Denimo, da imamo vozla K in J in neko projekcijo, ki je za oba regularna.

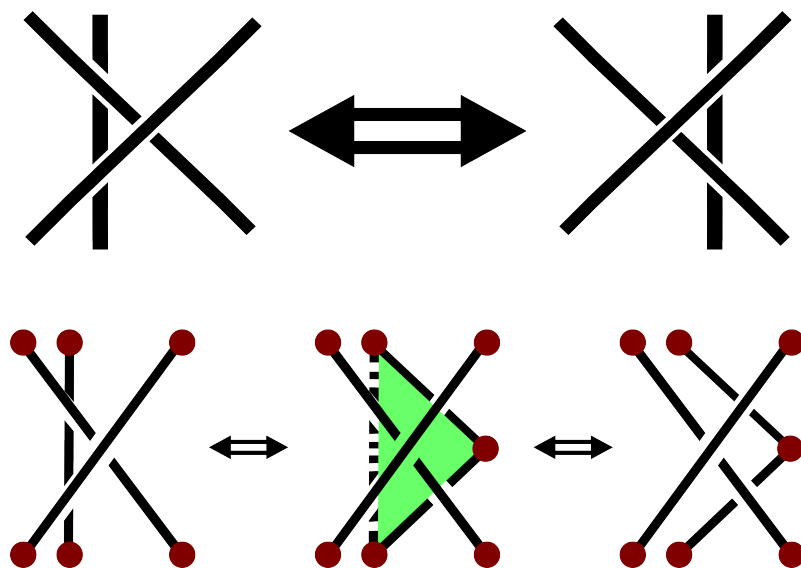
Začnimo z implikacijo v levo. Predpostavimo, da lahko iz diagrama vozla K pridemo do diagrama vozla J z zaporedjem Reidemeistrovih potez ter z ravninskimi izotopijami. Za vsako ravninsko izotopijo lahko najdemo deformacijo, ki ji ustreza, saj lahko vsako zvezno deformacijo na ravnini poljubno natančno posnemamo z vozelnimi deformacijami v prostoru. Prav tako lahko za vsako Reidemeistrovo potezo poiščemo zaporedje deformacij, tako da se poteza ujema s sliko po deformacijah, kot je razvidno na slikah 11, 12 in 13. Dobili smo torej zaporedje deformacij, ki vozla K spremeni v vozla J . Vozla sta po definiciji ekvivalentna.



Slika 11: Deformacije za prvo potezo.



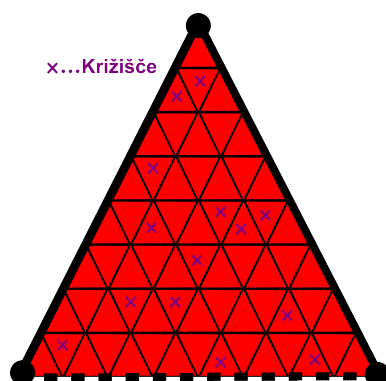
Slika 12: Deformacije za drugo potezo.



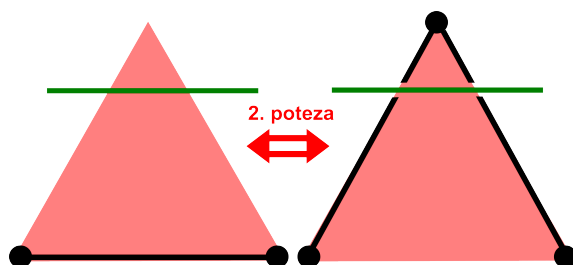
Slika 13: Deformacije za tretjo potezo.

Poglejmo si še implikacijo v drugo smer. Recimo, da sta K in J ekvivalentna. Predpostavimo lahko, da se razlikujeta le za eno deformacijo, saj iz dokaza za eno deformacijo očitno sledi dokaz za vse ekvivalentne vozle, ki jih dobimo z zaporedjem deformacij. Ker je projekcija regularna, se ta trikotnik slika v trikotnik na ravnini (vsako vozlišče vozla se slika v svojo točko na ravnini, tako da gre res za neizrojen trikotnik). Ta trikotnik lahko vsebuje veliko križišč, vendar ga lahko razdelimo na manjše podtrikotnike, tako da vsak podtrikotnik vsebuje največ eno križišče v svoji notranjosti in nobenega križišča na svojem robu (slika 14). Predstavljamo si lahko, da smo eno deformacijo razdelili na več manjših deformacij, ki skupaj sestavijo prvotno deformacijo (vsako manjšo deformacijo predstavlja en manjši trikotnik). Sedaj v vsakem trikotniku posebej preverimo, da smo uporabili le Reidemeistrove poteze in ravninsko izotopijo. Problem smo torej poenostavili na eno samo deformacijo, v kateri je največ eno križišče (slika 14).

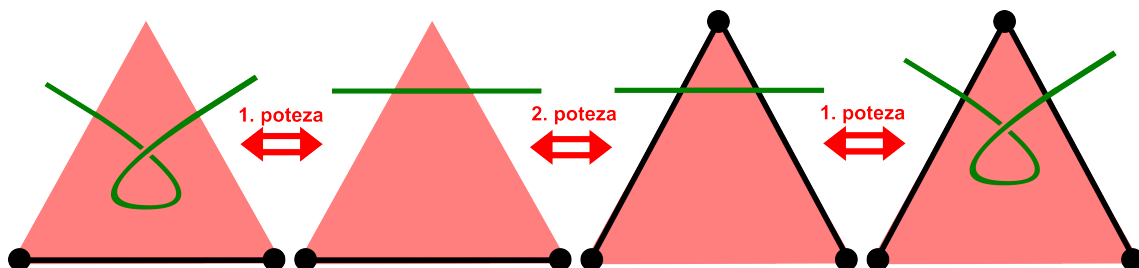
Naš cilj je izvesti deformacijo le z Reidemeistrovimi potezami in ravninskimi izotopijami, torej daljico med spodnjima dvema ogliščema trikotnika na slikah 16 in 17 prenesti v daljico od spodnjega levega oglišča do zgornjega oglišča in od zgornjega oglišča do spodnjega desnega oglišča (in obratno), ostale loke pa pustiti na miru. Če trikotnik v notranjosti ne seka projekcije vozla, je to seveda trivialno. Če trikotnik seka lok, ki znotraj trikotnika nima križišča, lahko uporabimo drugo Reidemeistrovo potezo, da tisti del vozla, ki ga deformiramo, povlečemo pod ali čez ta lok (slika 15). Če je takih lokov več, vendar se ne sekajo, potem korak ponovimo za vsakega. Nadalje ločimo primera za loke, ki imajo znotraj trikotnika križišče kot na slikah 16 in 17. Če lok v trikotnik vstopa iz spodnje stranice, je rešitev podobna. Torej lahko med diagramoma ekvivalentnih vozlov prehajamo z Reidemeistrovimi potezami. To dokaže drugi del našega izreka.



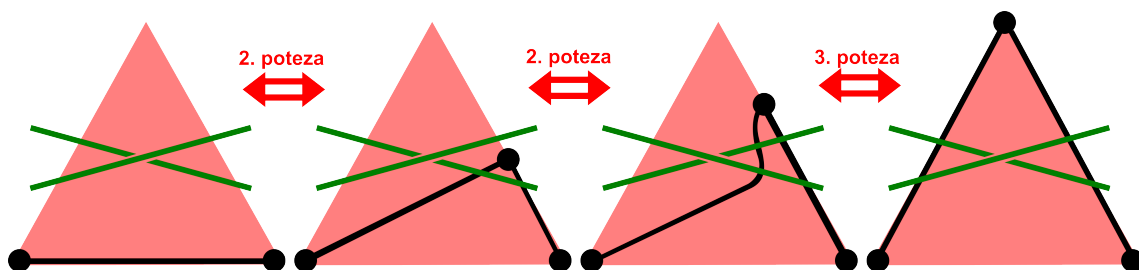
Slika 14: Razdelitev na trikotnike.



Slika 15: Lok brez križišča.



Slika 16: Prvi primer pri dokazu.



Slika 17: Drugi primer pri dokazu.

□

S tem smo res pokazali, da obstaja bijektivna korespondenca med ekvivalenčnimi razredi vozlov, ki jih dobimo z ekvivalenco, in ekvivalenčnimi razredi vozelnih

diagramov, ki jih dobimo z Reidemeistrovimi potezi in izotopijami prostora. V nadaljevanju bomo izraza vozle in vozelní diagram uporabljali kot sopomenki, če prej izrecno ne bomo povedali drugače.

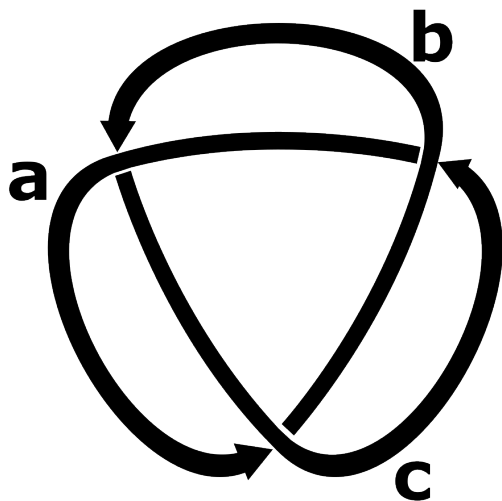
2.6 Orientirani vozli

Vozlom lahko priredimo orientacijo. Orientaciji sta vedno seveda dve: začnemo nekje na vozlu in potujemo po njem v neko smer, dokler ne pridemo nazaj na začetek.

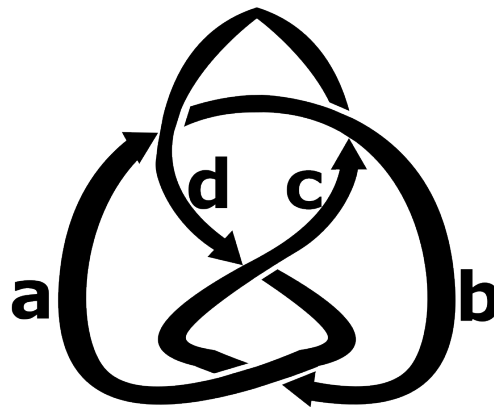
Definicija 2.16 ([5]). *Orientiran vozle* je dvojica vozla K in ureditve njegovih vozlišč $(p_1, \dots, p_n)$ na tak način, da še vedno določajo prvotni vozle.

Diagram orientiranega vozla nam poda usmeritev lokov, ki jo označimo s puščicami.

Primer 2.17. Na sliki 18 je diagram orientirane deteljice, na sliki 19 pa diagram orientirane osmice.



Slika 18: Orientirana deteljica.



Slika 19: Orientirana osmica.

◇

Izkaže se, da je orientiranim vozlom (oz. njihovim diagramom) mogoče pripisati veliko več lastnosti, zaradi česar je o vozlih pogosto lažje razmišljati kot o orientiranih vozlih. Že prej navedeni koncepti o vozlih se seveda razširijo na orientirane vozle.

Definicija 2.18 ([5]). Dva orientirana vozla sta *orientirano ekvivalentna*, če obstaja zaporedje deformacij, ki enega prenesejo v drugega.

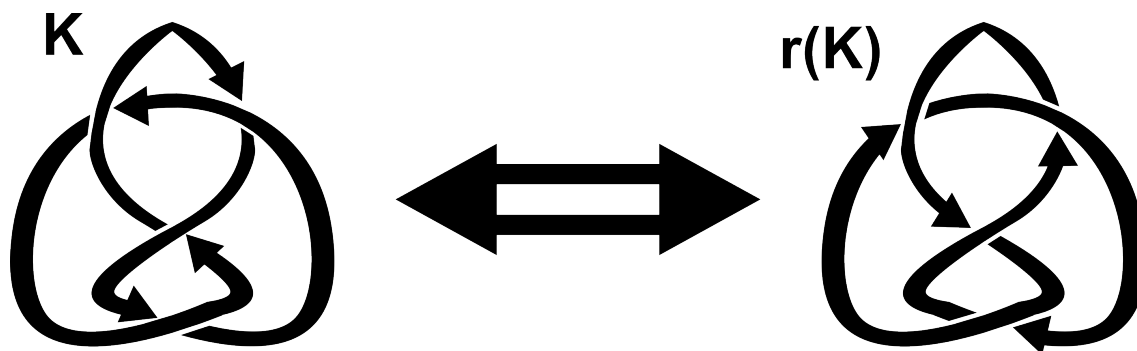
Tako kot za neorientirane vozle potem veljajo vsi prej dokazani izreki. Tako sta dva orientirana vozla ekvivalentna natanko tedaj, lahko diagram enega spremenimo v diagram drugega z zaporedjem Reidemeistrovih potez in ravninskih izotopij (pri tem sta diagrama seveda usmerjena).

Če govorimo o orientiranih vozlih, je seveda smiselno definirati tudi funkcijo, ki poda nasprotno orientiran vozle.

Definicija 2.19 ([2]). *Nasprotno orientiran voz* orientiranega vozla K je voz $r(K)$. Dobimo ga tako, da obrnemo ureditev njegovih vozlišč, npr.

$$(p_1, \dots, p_n) \rightarrow (p_n, \dots, p_1)$$

Primer 2.20. Na sliki 20 je primer nasprotno orientiranih vozlov.



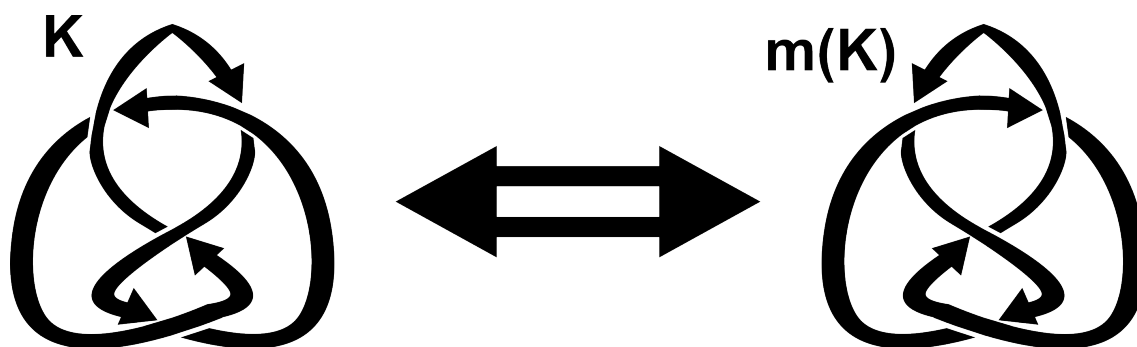
Slika 20: Nasprotno orientirani osmici.

◇

Prav tako kot ima vsak voz K dve orientaciji, ima lahko voz tudi dve zrcalni obliki. Nekateri vozli so ekvivalentni svoji zrcalni podobi (npr. osmica), veliko pa tudi ne (npr. deteljica).

Definicija 2.21 ([2]). *Zrcalni voz* vozla K je voz $m(K)$, ki ga dobimo, če voz K prezrcalimo preko neke ravnine v prostoru, oz. če vozni diagram prezrcalimo preko neke premice v ravnini diagrama.

Primer 2.22. Na sliki 21 je primer zrcalne podobe osmice.

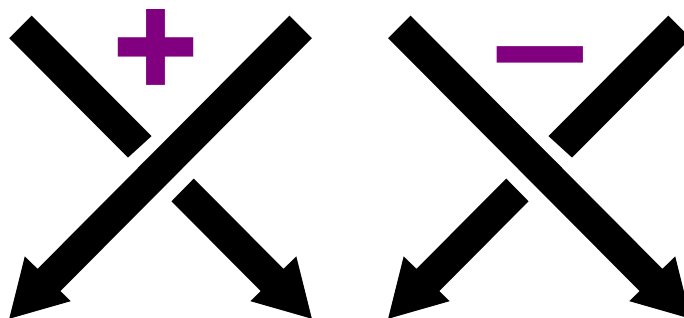


Slika 21: Zrcalna podoba osmice.

◇

Kadar govorimo o orientiranih vozlih, je včasih smiselno omeniti še pojem predznaka križišča. V tem diplomskem delu pojem omenjamo le za obrazložitev poimenovanja, ki nastopi v naslednjem poglavju.

Definicija 2.23 ([1]). Križišča orientiranega vozla so lahko *pozitivna* (+) ali *negativna* (-), kot na sliki 22.



Slika 22: Predznaka križišč.

2.7 Povezana vsota

Na vozlih lahko definiramo operacijo, ki združi dva vozla. Rezultat je seveda nov vozlel, sestavljen iz prejšnjih dveh.

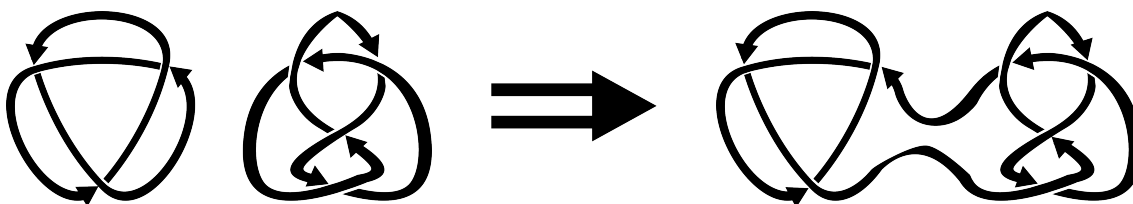
Definicija 2.24. *Povezana vsota* orientiranega vozla K , definiranega s $(p_1, \dots, p_n)$, in vozla J , definiranega s $(q_1, \dots, q_m)$, kjer so preseki med trikotniki

$$(p_n, q_1, q_m), (p_1, q_1, q_m), (p_n, p_1, q_m) \text{ in } (p_n, p_1, q_1)$$

ter vozloma K in J prazni, z izjemo stranic $p_1 p_n$ in $q_1 q_m$, je orientiran vozlel $K \# J$, ki ga definirajo točke $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_m)$.

Ta vozlel je neodvisen od izbranih oznak za vozlišča.

Primer 2.25. Na sliki 23 je primer povezane vsote deteljice in osmice.



Slika 23: Povezana vsota.

◇

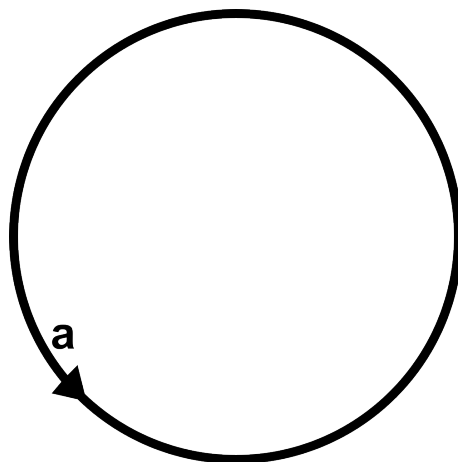
2.8 Pravozli

Oglejmo si sedaj pomembno skupino vozlov: pravozle.

Najpreprostejši vozlel, ki ga poznamo, je nevozel.

Definicija 2.26. *Nevozel* je vozlel, katerega diagram lahko narišemo tako, da nima križišč.

Primer 2.27. Na sliki 24 je primer diagrama nevozla.



Slika 24: Nevozel.

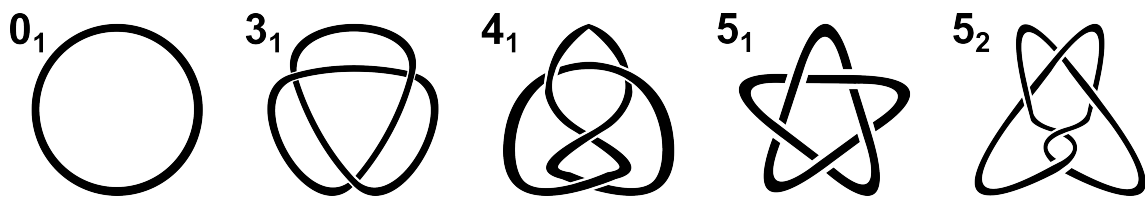


Obstajajo vozli, ki se jih ne da razbiti na manjše podvozle. Te imenujemo pravozli, ime je seveda analog praštevilom, ki jih ne moremo razbiti na faktorje: edina faktorja, ki ju imajo, so število 1 (pri vozlih to vlogo vzame nevozel) in število samo.

Definicija 2.28. Vozlom, ki niso povezana vsota dveh ali večih preprostejših vozlov (z izjemo nevozla), pravimo *pravozli*.

Pravozlom lahko priredimo unikatne oznake. To naredimo tako, da za vsakega izberemo diagram z najmanjšim možnim številom križišč. Tak diagram vedno obstaja, saj je število križišč naravno število, omejeno navzdol z 0. Povsem drug problem pa je za dani vozle to obliko najti. Izkaže se, da ne poznamo algoritma, ki bi za dani vozle poiskal diagram zanj z najmanjšim številom križišč. Naiven poskus bi bil, da bi poskušali z Reidemeistrovimi potezami vozle poenostaviti, vendar tak algoritem ne bi prišel prav daleč. Včasih je namreč diagram potrebno dodatno zakomplicirati, da ga potem lahko spravimo v najpreprostejšo možno obliko. V tabeli pravozlov tako vozle uredimo po najmanjšem številu križišč. To predstavlja velika številka. Mala številka ob njej pa predstavlja arbitrarno določeno zaporedno številko vozla z določenim številom križišč. Pri tem štejemo zrcalne podobe kot isti vozle, četudi nista ekvivalentna. Vozel brez križišč je le en: nevozel. Vozla z le enim ali dvema križiščema ni, saj lahko vsak tak vozle dodatno poenostavimo v nevozel. Edini vozle s tremi križišči je deteljica, edini vozle s štirimi pa osmica. Za vsako nadaljnje število križišč obstaja več vozlov: dva s petimi križišči, trije s šestimi, sedem s sedmimi, itd.

Primer 2.29. Na sliki 25 je tabela pravozlov s petimi ali manj križišči.



Slika 25: Tabela pravozlovov.

◇

2.9 Vozelne invariante

Poglavitni problem teorije vozlov je preverjanje, če sta dva neznana vozla ekvivalentna. V namen reševanja tega problema uporabljamo vozalne invariante.

Definicija 2.30. *Invarianta vozla* je neka lastnost vozla, ki se ne spremeni ob deformacijah. Ekvivalentno, je lastnost vozelnega diagrama, ki se ne spremeni ob Reidemeistrovih potezah in izotopijah diagrama.

Tako lahko vemo, da če dva vozla ne delita neke invariante, potem gotovo nista ekvivalentna. Vozelnih invariant je veliko in so različno močne (kar pomeni, da različno dobro razlikujejo med različnimi vozli) in različno komplicirane za izračun.

Primer 2.31. Primeri vozelnih invariant so grupe, ki jih priredimo posameznim vozlom, polinomi (npr. Alexandrovi polinomi), števila barvanj itd.

Dober vpogled v različne tipe vozelnih invariant in teorijo vozlov nasploh predstavi knjiga dr. Louisa H. Kauffmanna: *On Knots* [4]. ◇

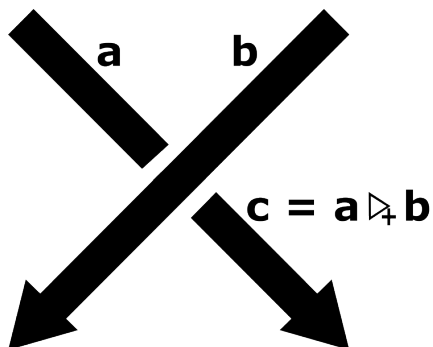
3 Kvandli

V tem poglavju bomo definirali pojem kvandla in si ogledali nekaj preprostih primerov. Omeniti je treba tudi, da se bomo od te točke dalje ukvarjali primarno le še z orientiranimi vozli.

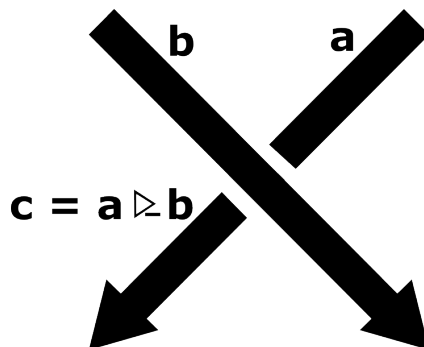
3.1 Definicija operacij

Oglejmo si naslednji dve binarni operaciji:

Definicija 3.1 ([1]). Po zgledu tega, kako se v križišču vozelnega diagrama lahko sekajo trije loki, definiramo dve binarni algebraini operaciji, $\triangleright_+$ in $\triangleright_-$:



Slika 26: Operacija $\triangleright_+$



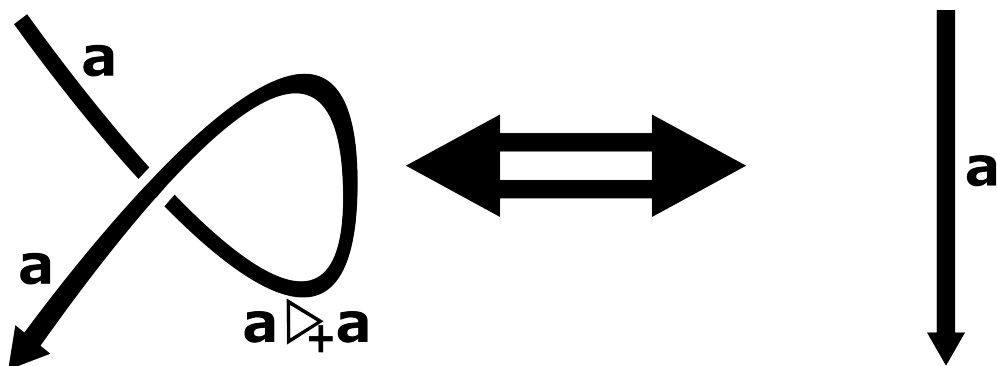
Slika 27: Operacija $\triangleright_-$

Oznaki operacij dobimo iz predznakov križišč.

3.2 Uskladitev operacij z Reidemeistrovimi potezami

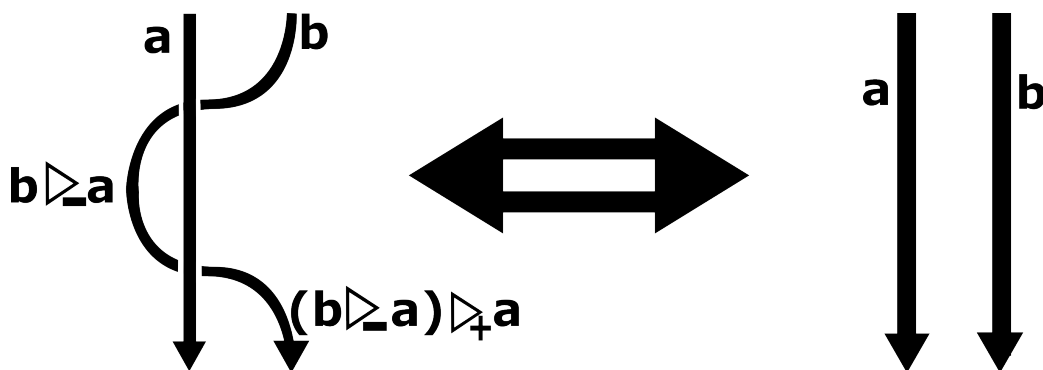
Lastnosti operacij $\triangleright_+$ in $\triangleright_-$ želimo uskladiti z Reidemeistrovimi potezami, saj bo tako definirana algebraična struktura odražala topološke lastnosti vozlov. Bolj natančno, lastnosti, ki jih bomo definirali iz te algebraične strukture, se bodo tako ohranjale pri izvajanju Reidemeistrovih potez in bodo tako postale vozalne invariante.

Trditev 3.2 ([1]). *Oglejmo si vsako potezo posebej:*



Slika 28: Uskladitev s prvo potezo.

Torej je $a \triangleright_+ a = a$. Enako bi dobili $a \triangleright_- a = a$.



Slika 29: Uskladitev z drugo potezo.

Torej je

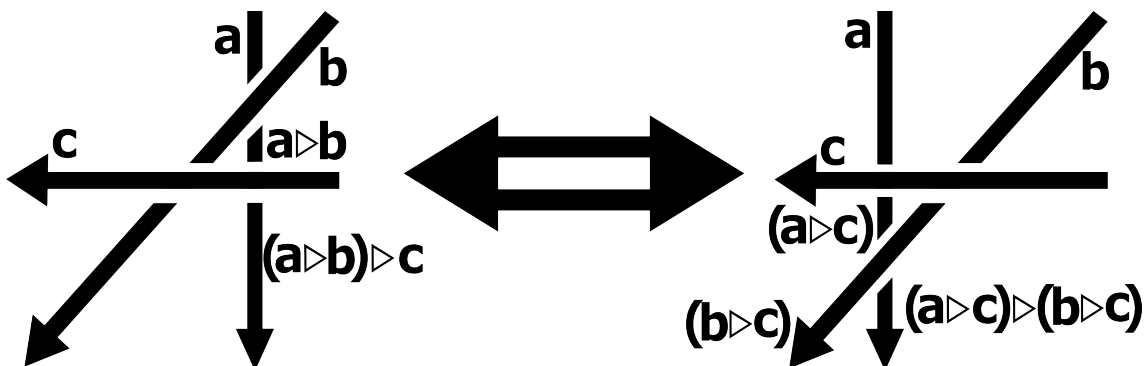
$$(b \triangleright_- a) \triangleright_+ a = b.$$

Z drugačno orientacijo lokov bi dobili tudi

$$(b \triangleright_+ a) \triangleright_- a = b.$$

Operaciji $\triangleright_+$ in $\triangleright_-$ sta si torej inverzni in lahko definiramo:

$$a \triangleright b := a \triangleright_+ b \text{ in } a \triangleright^{-1} b := a \triangleright_- b$$



Slika 30: Uskladitev s tretjo potezo.

Velja torej

$$(a \triangleright b) \triangleright c = (a \triangleright c) \triangleright (b \triangleright c).$$

Končamo tako z eno operacijo z zgoraj navedenimi lastnostmi.

3.3 Definicija kvandlov

Definiramo strukturo:

Definicija 3.3 ([1]). *Kvandel* je množica X z binarno operacijo $\triangleright : X^2 \rightarrow X$, za katero velja:

1. Za vsak a iz X je $a \triangleright a = a$,

2. Za vsaka a, b iz X obstaja natanko en c iz X , za katerega velja $a = c \triangleright b$,
3. Za vsake a, b, c iz X velja $(a \triangleright b) \triangleright c = (a \triangleright c) \triangleright (b \triangleright c)$

Druga lastnost nam pove, da za vsaka dva elementa obstaja neki tretji element, ki ju povezuje. Definiramo lahko inverz operacije $\triangleright^{-1}$, ki nam ta iskani element poišče: $c = a \triangleright^{-1} b$.

3.4 Alexandrovi kvandli

Želeli bi poiskati kakšne preproste primere kvandlov.

Definicija 3.4 ([1]). Naj bosta $t, n \in \mathbb{N}, t < n$ tuji naravni števili. Sledi, da ima t inverz t^{-1} v $\mathbb{Z}_n$. Definiramo operacijo $\triangleright$ na $\mathbb{Z}_n$:

$$a \triangleright b := ta + (1 - t)b.$$

Definiramo $\Lambda_{n,t}$ kot $\mathbb{Z}_n$ z operacijo $\triangleright$. Strukture $\Lambda_{n,t}$ imenujemo *Alexandrovi kvandli*.

Alexandrovi kvandli predstavljajo pomembno družino končnih kvandlov, saj jih lahko na preprost način definiramo iz vsake grupe $\mathbb{Z}_n$.

Preveriti moramo še:

Trditev 3.5. $\Lambda_{n,t}$ je res kvandel.

Dokaz. Preveriti moramo vse aksiome za kvandle.

1. Za vsak a je $a \triangleright a = ta + (1 - t)a = ta + a - ta = a$.
2. Za poljubna a in b iščemo c , tako da bo veljalo $a = c \triangleright b = tc + (1 - t)b$. Sledi

$$c = t^{-1}a + (1 - t^{-1})b =: a \triangleright^{-1} b.$$

Tak c res obstaja in je enolično določen, saj je t tuj n in ima zato (enolično določen) inverz t^{-1} v $\mathbb{Z}_n$.

3. Za poljubne a, b in c izrazimo

$$\begin{aligned} (a \triangleright b) \triangleright c &= t(ta + (1 - t)b) + (1 - t)c = \\ &= t^2a + t(1 - t)b + t(1 - t)c + (1 - t)^2c = \\ &= t(ta + (1 - t)c) + (1 - t)(tb + (1 - t)c) = \\ &= t(a \triangleright c) + (1 - t)(b \triangleright c) = \\ &= (a \triangleright c) \triangleright (b \triangleright c) \end{aligned}$$

$\Lambda_{n,t}$ je torej res kvandel. □

Oglejmo si primer Alexandrovega kvandla.

Primer 3.6. Alexandrov kvandel $\Lambda_{5,3}$ je algebraična struktura v tabeli 1

$\triangleright$	0	1	2	3	4
0	0	3	1	4	2
1	3	1	4	2	0
2	1	4	2	0	3
3	4	2	0	3	1
4	2	0	3	1	4

Tabela 1: Kvandel $\Lambda_{5,3}$.

V tem primeru je operacija $\triangleright$ komutativna, saj je

$$t = 3 = (-2) = (1 - 3) = (1 - t),$$

vendar to v večini primerov ni res. ◇

3.5 Dualni kvandli

Vsakemu kvandlu lahko pripišemo t. i. dualni kvandel. Pomen dualnih kvandlov bo razviden kasneje v diplomskem delu.

Definicija 3.7 ([2]). *Dualni kvandel* kvandla X z operacijo $\triangleright$ je kvandel X^* z operacijo $\triangleright^* = \triangleright^{-1}$.

Seveda preverimo, da je dualni kvandel res kvandel.

Trditev 3.8. *Dualni kvandel X^* je res kvandel.*

Dokaz. Preverimo po aksiomih

1. Iz $a \triangleright a = a$ sledi $a = a \triangleright^{-1} a$,
2. Za vsak a in b iz X obstaja natanko en c iz X tako, da je $a = c \triangleright^{-1} b$. Ta c je seveda $c = a \triangleright b$

3.

$$\begin{aligned} a &= (a \triangleright^{-1} b) \triangleright b = \left(\left((a \triangleright^{-1} b) \triangleright^{-1} c \right) \triangleright c \right) \triangleright \left((b \triangleright^{-1} c) \triangleright c \right) = \\ &= \left(\left((a \triangleright^{-1} b) \triangleright^{-1} c \right) \triangleright (b \triangleright^{-1} c) \right) \triangleright c \end{aligned}$$

Sledi

$$a \triangleright^{-1} c = \left((a \triangleright^{-1} b) \triangleright^{-1} c \right) \triangleright (b \triangleright^{-1} c),$$

iz česar nadalje sledi

$$(a \triangleright^{-1} c) \triangleright^{-1} (b \triangleright^{-1} c) = (a \triangleright^{-1} b) \triangleright^{-1} c,$$

kar smo želeli pokazati.

Dualni kvandel je torej res kvandel. $\square$

Primer 3.9. Dualni kvandel kvandla $\Lambda_{5,3}$ iz primera 3.6 v tabeli 1 je kvandel z operacijo $a \triangleright^{-1} b$, ki jo dobimo z

$$a \triangleright^{-1} b = 3^{-1}a + (1 - 3^{-1})b = 2a + (1 - 2)b.$$

Gre torej za kvandel $\Lambda_{5,2}$ v tabeli 2

$\triangleright$	0	1	2	3	4
0	0	4	3	2	1
1	2	1	0	4	3
2	4	3	2	1	0
3	1	0	4	3	2
4	3	2	1	0	4

Tabela 2: Kvandel $\Lambda_{5,2}$.

$\diamond$

4 Uporaba kvandlov

V zadnjem poglavju bomo obravnavali vozalne invariante, ki jih lahko dobimo s kvandli, in rešili nekaj primerov.

4.1 Foxov izrek o tribarvanju

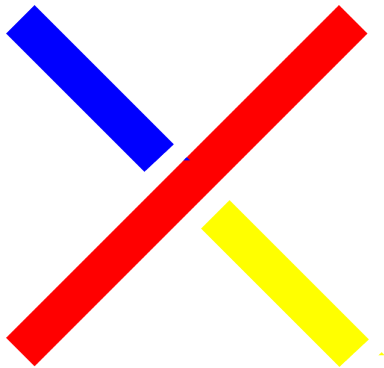
Oglejmo si preprosto vozelnno invarianto.

Definicija 4.1. Ustrezno *tribarvanje* vozelnega diagrama je preslikava

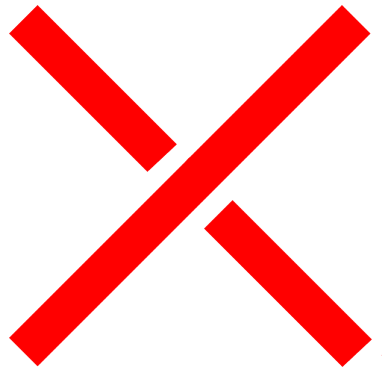
$$c : \{\text{loki na diagramu}\} \rightarrow \{0, 1, 2\},$$

za katero v vsakem križišču velja ena izmed naslednjih lastnosti:

1. V križišču se sekajo trije loki različnih barv, kot na sliki 31.
2. V križišču se sekajo trije loki enake barve, kot na sliki 32.



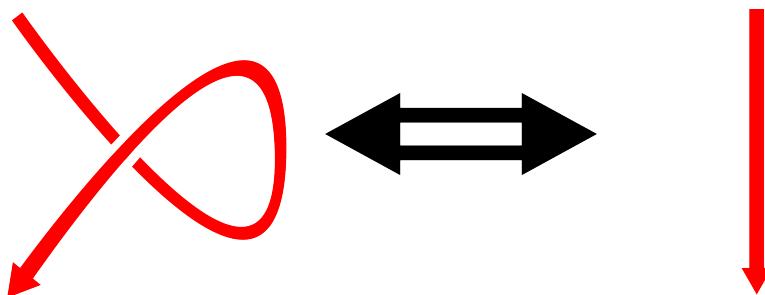
Slika 31: Loki različnih barv.



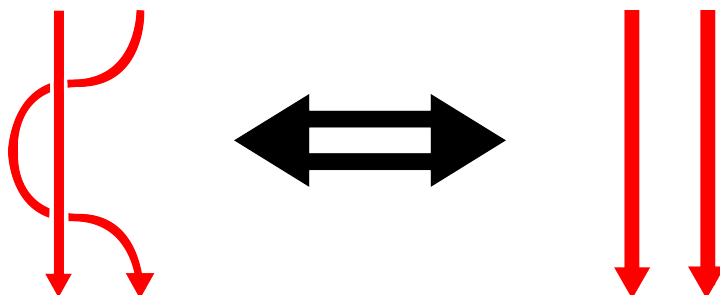
Slika 32: Loki enake barve.

Izrek 4.2 (Foxov izrek o tribarvanju). *Število tribarvanj je vozalna invarianta. Torej imajo vsi vozelni diagrami, ki predstavljajo isti vozel, enako število tribarvanj.*

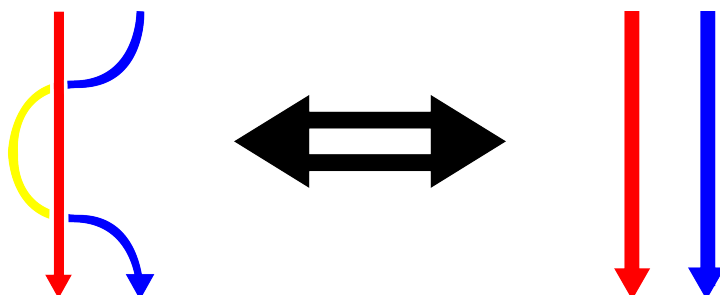
Dokaz. Preveriti moramo, da se število tribarvanj pri izvedeni Reidemeistrovi potezi ne spremeni. Pomembno je torej, da pri vsaki potezi loki, ki niso omejeni znotraj sheme, ostanejo iste barve. Poglejmo vsako potezo posebej.



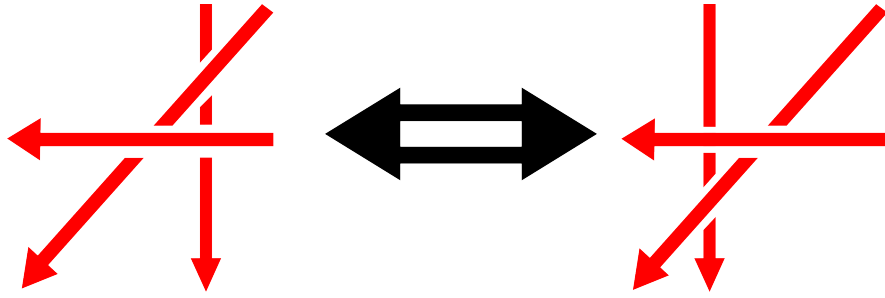
Slika 33: Tribarvanje pri prvi potezi.



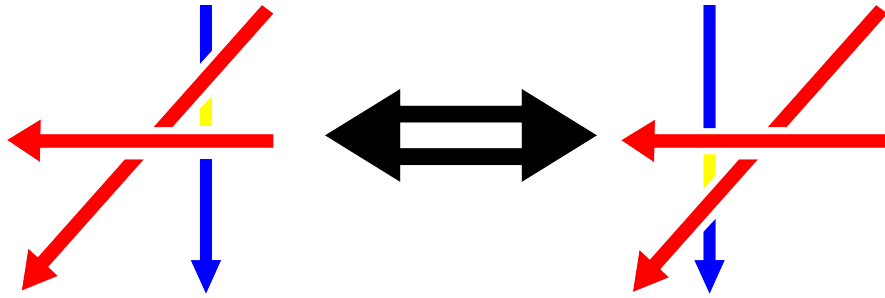
Slika 34: Tribarvanje pri drugi potezi, prvi primer.



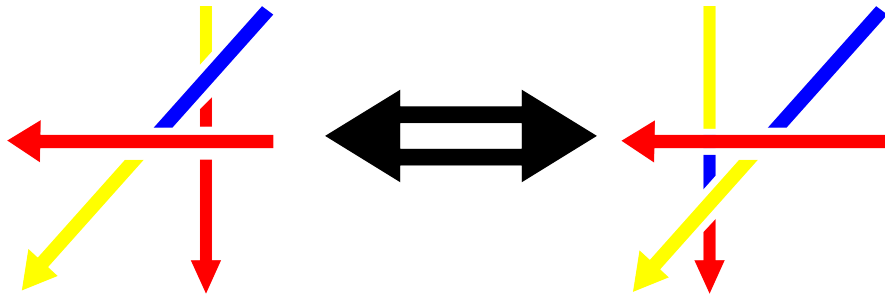
Slika 35: Tribarvanje pri drugi potezi, drugi primer.



Slika 36: Tribarvanje pri tretji potezi, prvi primer.



Slika 37: Tribarvanje pri tretji potezi, drugi primer.



Slika 38: Tribarvanje pri tretji potezi, tretji primer.

Tretji primer tretje poteze dopušča tri možnosti pri variaciji barv navpičnega dela vozla (ki gre pod drugima dvema), vendar je rešitev vseh treh možnosti enaka, saj moramo izbrati le ustrezno barvo za kratek vmesni lok. $\square$

Na barve, torej $\{0, 1, 2\}$, lahko gledamo kot na elemente $\mathbb{Z}_3$. Vemo, da velja

$$\begin{aligned} x_1, x_2, x_3 &\in \mathbb{Z}_3; \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ &\text{natanko tedaj, ko} \\ \text{ali } x_1 = x_2 = x_3 &\text{ ali } x_1 \neq x_2, x_1 \neq x_3, x_2 \neq x_3, \end{aligned}$$

saj iz $2x_1 + x_2 = 0$ sledi $x_2 = -2x_1 = x_1$, torej če sta dva izmed x_1, x_2 in x_3 enaka, jima je enak tudi tretji.

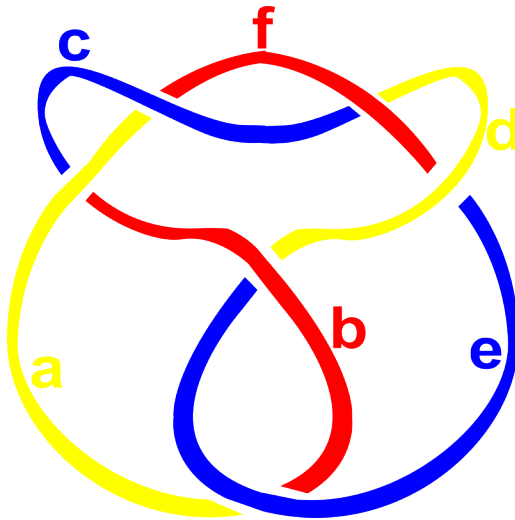
Trditev 4.3 ([1]). *Tribarvanje vozelnega diagrama dobimo tako, da vsakemu loku dodelimo neznanko x_i , ki predstavlja njegovo barvo kot element $\mathbb{Z}_3$, nato pa za vsako*

križišče rešujemo enačbo $x_i + x_j + x_k = 0$, kjer so x_i , x_j in x_k neznanke, dodeljene lokom, ki se v danem križišču srečajo. Dobimo torej sistem n enačb v $\mathbb{Z}_3$, kjer je n število križišč. Število tribarvanj je enako številu rešitev tega sistema enačb.

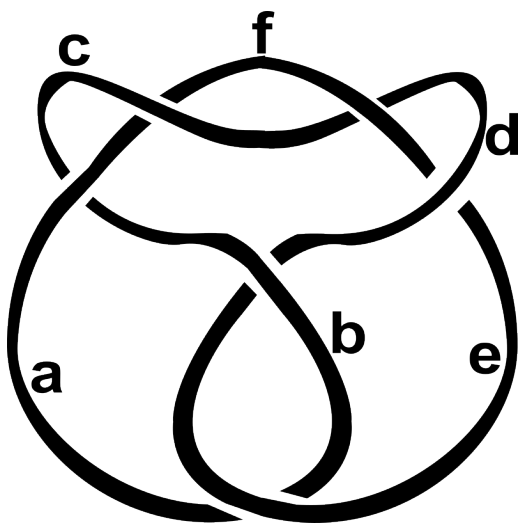
Število tribarvanj je zelo preprosta vozalna invarianta. Za vsak vozle jo lahko izračunamo zelo hitro. Tako je eden najlažjih načinov razlikovanja med vozli.

Primer 4.4. Poiščemo število tribarvanj vozla na sliki 40 in vozla na sliki 41. Prvi ima netrivialno tribarvanje, kot je razvidno na sliki 39, drugi pa nima netrivialnih tribarvanj, kar lahko pokažemo na preprost način. Recimo npr. da loka x_1 in x_2 nista iste barve. Brez škode za splošnost lahko rečemo $c(x_1) = 0, c(x_2) = 1$. Sledi $c(x_3) = 2$, saj le tako lahko zadostimo pogoju za ustrezno tribarvanje v križišču, kjer se sekajo x_1, x_2 in x_3 . Z enakim razmislekom dobimo nato $c(x_5) = 0$ za križišče x_2, x_3, x_5 ter za tem $c(x_4) = 0, c(x_6) = 2$ za križišči x_1, x_5, x_4 in x_2, x_5, x_6 . Vendar potem se v križišču x_1, x_4, x_6 , kjer so barve $(0, 0, 2)$, in v križišču x_3, x_4, x_6 , kjer so barve $(2, 0, 2)$, pogoj ne izide. Do istega zaključka bi prišli, če bi izbrali poljubna dva loka na vozlu in ju pobarvali z različno barvo.

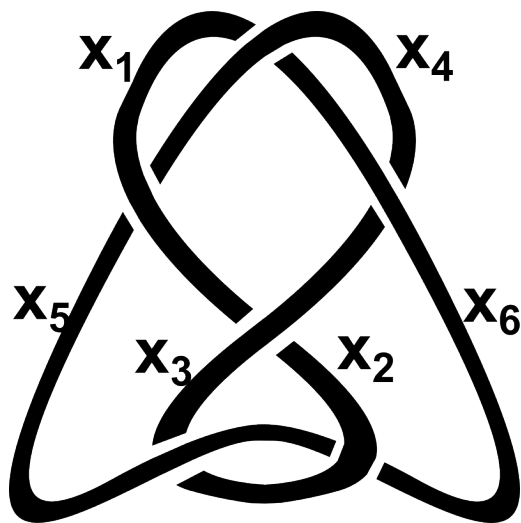
Izkaže se, da ima vozle na sliki 40 devet tribarvanj, vozle na sliki 41 pa le trivialna tribarvanja, torej le tri. Diagrama torej ne predstavljata istega vozla. Res, gre za vozle 6_1 na sliki 40 in vozle 6_2 na sliki 41.



Slika 39: Primer netrivialnega barvanja vozla 6_1



Slika 40: Vozel 6_1 z devetimi tribarvanji.

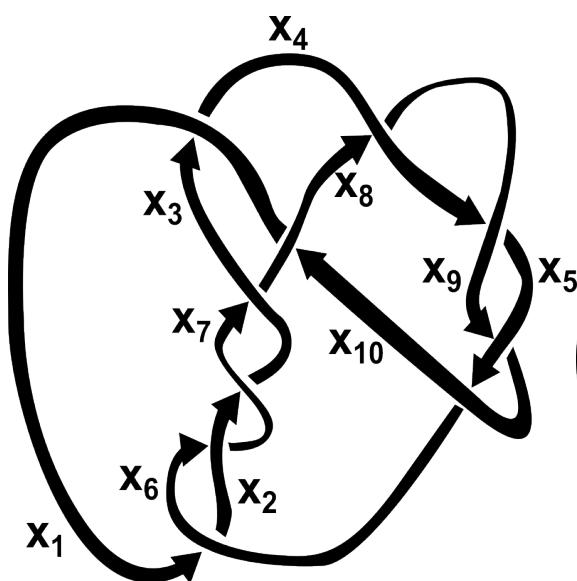


Slika 41: Vozel 6_2 s tremi tribarvanji.

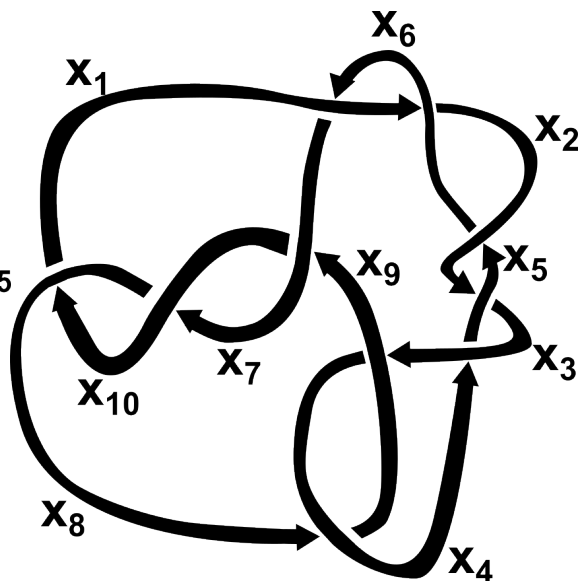
◇

Problem nastopi pri dejstvu, da je število tribarvanj zelo šibka vozalna invarianta. Veliko različnih vozlov ima namreč enako število tribarvanj. Invarianta nam koristi le, če imata vozla različno število tribarvanj, saj to pomeni, da nista ekvivalentna. Če imata enako število tribarvanj, pa nam to ne zagotovi, da sta ekvivalentna.

Primer 4.5. Poiščemo še tribarvanja vozlov na slikah 42 in 43. Izkaže se, da imata oba le tri trivialna tribarvanja. Število tribarvanj nam torej ne pove, če gre za isti vozle ali ne.



Slika 42: Prvi neznan vozle.



Slika 43: Drugi neznan vozle.

◇

4.2 Barvanje s kvandli

Namesto da barvamo loke vozelnega diagrama s tremi barvami, lahko barvamo loke diagrama orientiranega vozla z elementi poljubnega kvandla.

Definicija 4.6. Ustrezno barvanje diagrama vozla K s kvandlom X je preslikava

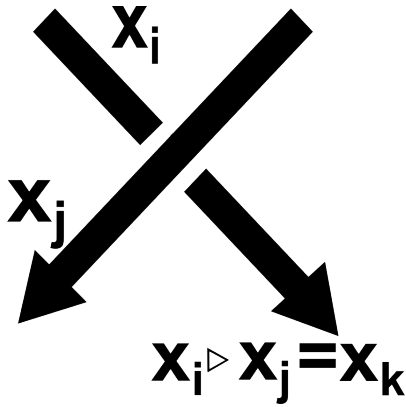
$$c : \{\text{loki na diagramu}\} \rightarrow X,$$

za katero v vsakem križišču velja, da če se loki v križišču sekajo kot na sliki 44, potem mora v kvandlu X veljati:

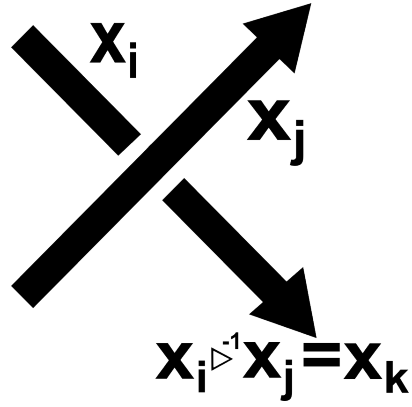
$$c(x_i) \triangleright c(x_j) = c(x_k),$$

če pa se loki v križišču sekajo kot na sliki 45, potem pa mora v kvandlu X veljati:

$$c(x_i) \triangleright^{-1} c(x_j) = c(x_k).$$



Slika 44: Pozitivno križišče.



Slika 45: Negativno križišče.

Število barvanj diagrama vozla K s kvandlom X označimo s $Col_X(K)$. V nadaljevanju bomo za računanje števila barvanj vozla s kvandlom loke diagrama kar identificirali z njihovo barvo, torej bomo namesto $c(x_i) \triangleright c(x_j) = c(x_k)$ v enačbah pisali kar $x_i \triangleright x_j = x_k$.

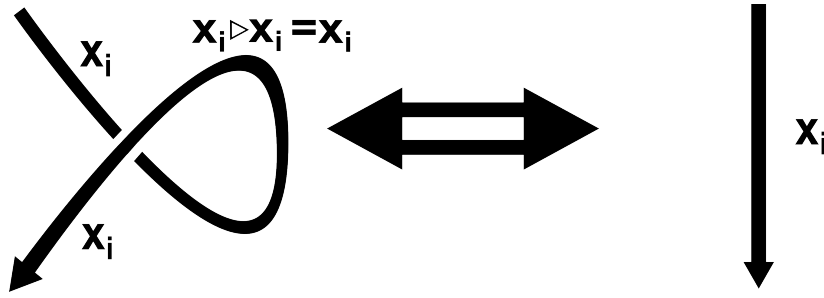
Barvanje s kvandli je ena možna razširitev ideje tribarvanja.

Primer 4.7. Izkaže se, da je tribarvanje v resnici poseben primer barvanja s kvandli: bolj specifično je barvanje s kvandlom $\Lambda_{3,2}$. $\diamond$

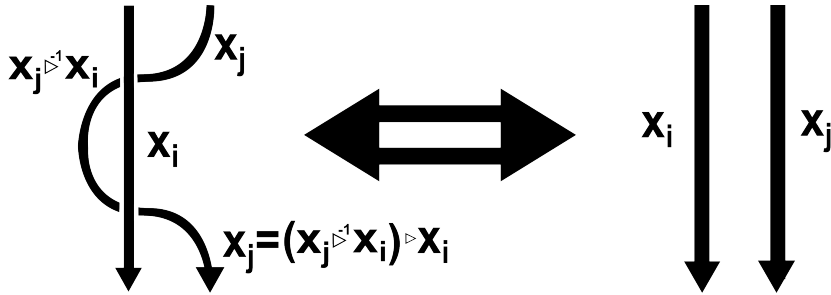
Preostane še pokazati, da je barvanje s kvandli res vozeln invarianta.

Izrek 4.8. Za vozle K in kvandel X je $Col_X(K)$ vozeln invarianta do orientacije in simetrije natančno.

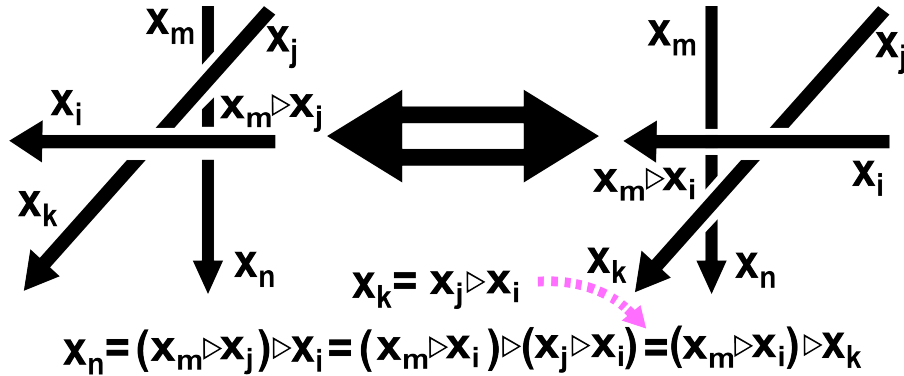
Dokaz. Kot pri Foxovem izreku o tribarvanju moramo pokazati, da se število barvanj z nekim kvandlom ne spremeni pri izvajanju Reidemeistrovih potez. Spet si oglejmo vsako potezo posebej.



Slika 46: Barvanje s kvandli, prva poteza.



Slika 47: Barvanje s kvandli, druga poteza.



Slika 48: Barvanje s kvandli, tretja poteza.

Iz tega sledi, da je število barvanj s kvandlom res invarianta. □

Barvanje s kvandli nam da poljubno mnogo relativno preprostih vozelnih invariant. Če dva vozla delita število barvanj z nekim kvandlom, lahko vedno uporabimo nov kvandel.

4.3 Barvanje z Alexandrovimi kvandli

Posebej preprosto je barvanje z Alexandrovimi kvandli.

Trditev 4.9 ([1]). *Število barvanj vozla K z Alexandrovim kvandlom $\Lambda_{n,t}$, torej $Col_{\Lambda_{n,t}}(K)$, lahko izračunamo z enačbami*

$$tx_i + (1 - t)x_j - x_k = 0,$$

če se loki srečajo kot na sliki 44, in z enačbami

$$t^{-1}x_i + (1 - t^{-1})x_j - x_k = 0,$$

če se loki srečajo kot na sliki 45, kjer so x_i, x_j in x_k neznanke za barve lokov v nekem križišču. Dobimo torej sistem m enačb v $\mathbb{Z}_n$, kjer je m število križišč, ki jih ima naš vozel.

Vsaka rešitev sistema nam da eno barvanje s kvandlom $\Lambda_{n,t}$.

Primer 4.10. Poiščimo število barvanj $Col_{\Lambda_{5,4}}$ z Alexandrovim kvandlom $\Lambda_{5,4}$ za vozla, ki ju prej nismo uspeli ločiti s Foxovim izrekom o tribarvanju.

Vozel na sliki 49 ima le pet trivialnih barvanj. Če namreč predpostavimo, da sta dva loka drugačnih barv, pridemo do protislovja.

Vozel na sliki 50 pa ima tudi netrivialna barvanja. Bolj natančno, če rešimo sistem enačb, dobimo

$$x_1 = x_4 = 4x_6 + 2x_8$$

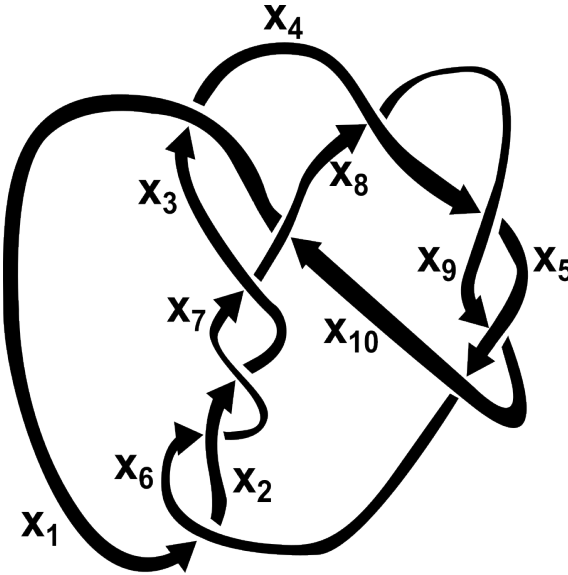
$$x_2 = x_9 = 3x_6 + 3x_8$$

$$x_3 = x_7 = 2x_6 + 4x_8$$

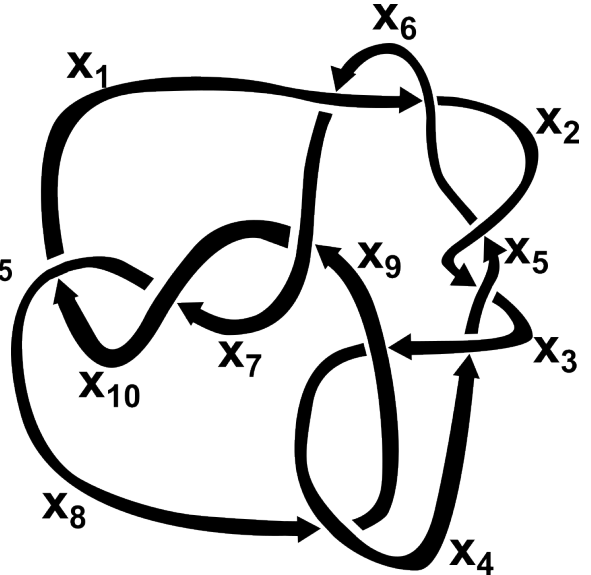
$$x_{10} = x_6, x_5 = x_8.$$

Vozel ima torej 25 barvanj z $\Lambda_{5,4}$. Barvanja dobimo z izbiro x_6 in x_8 in izračunom drugih barv.

Diagrama na slikah 49 in 50 torej ne določata istih vozlov. Res, na sliki 49 je vozel 10_{17} , na sliki 50 pa vozel 10_{20} .



Slika 49: Vozel 10_{17} .

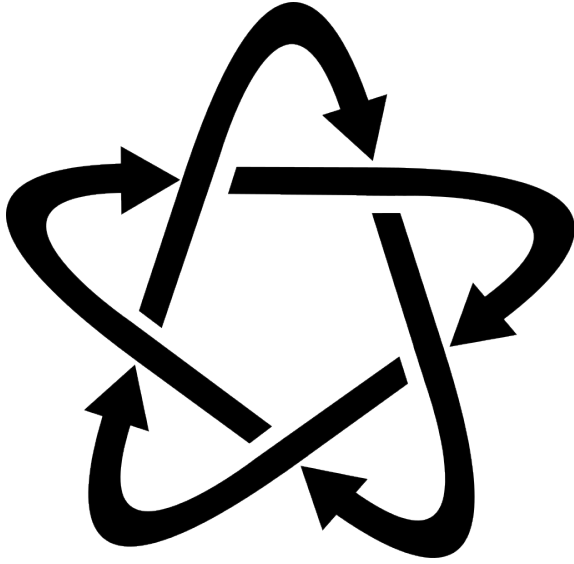


Slika 50: Vozel 10_{20} .

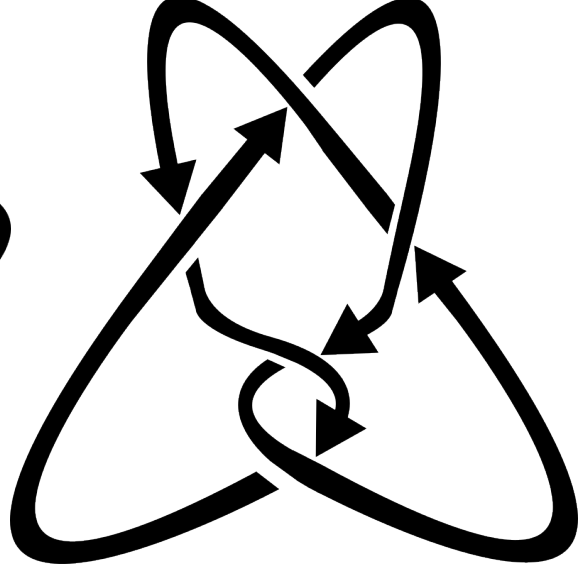
◇

Prav tako kot pri številu tribarvanj pa ni nujno, da nam bo število barvanj s kvandli dalo relevantno informacijo. Če imata dva vozla enako število barvanj z več kvandli, še ne pomeni, da sta ekvivalentna.

Primer 4.11. Vozla 5_1 in 5_2 na slikah 51 in 52 imata le trivialna barvanja z Alexandrovim kvandlom $\Lambda_{5,4}$. Če bi med njima želeli ločiti, bi morali barvati s kakšnim drugim kvandlom.



Slika 51: Vozel 5_1 .



Slika 52: Vozel 5_2 .

◇

Izrek 4.12 ([2]). *Za barvanje vozla K s kvandlom X velja:*

1. $Col_X(K) = Col_X(r(m(K)))$,
2. $Col_X(r(K)) = Col_X(m(K))$,
3. $Col_X(K) = Col_{X^*}(m(K))$,

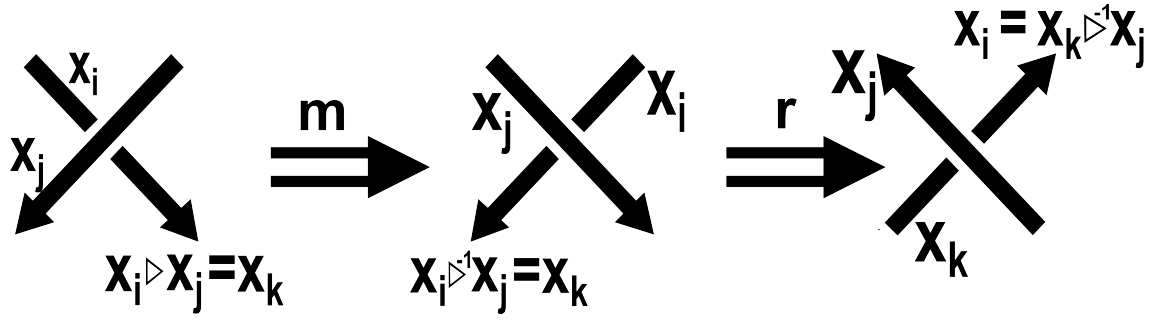
kjer je $m(K)$ zrcalni vozla K , $r(K)$ nasprotno orientiran vozla K in X^* dualni kvandel kvandla X .

Izrek nam pove, kako je število barvanj z nekim kvandlom povezano z nasprotno orientiranimi vozli in z zrcalnimi podobami vozlov in nam da močno orodje za razlikovanje vozlov od njihovih zrcalnih podob ter nasprotno orientiranih vozlov.

Dokaz. Recimo, da imamo na prvotnem vozlu K križišče, iz katerega za barvanje s kvandlom X dobimo enačbo $x_i \triangleright x_j = x_k$. Oglejmo si vsako točko posebej.

Vozel $r(m(K))$ ima v križišču, ki ga dobimo iz prvotnega, enačbo $x_i = x_k \triangleright^{-1} x_j$ (slika 53), iz česar sledi enačba $x_i \triangleright x_j = x_k$. To velja za vsako križišče, torej je sistem enačb, ki ga dobimo, enak prvotnemu. Sledi

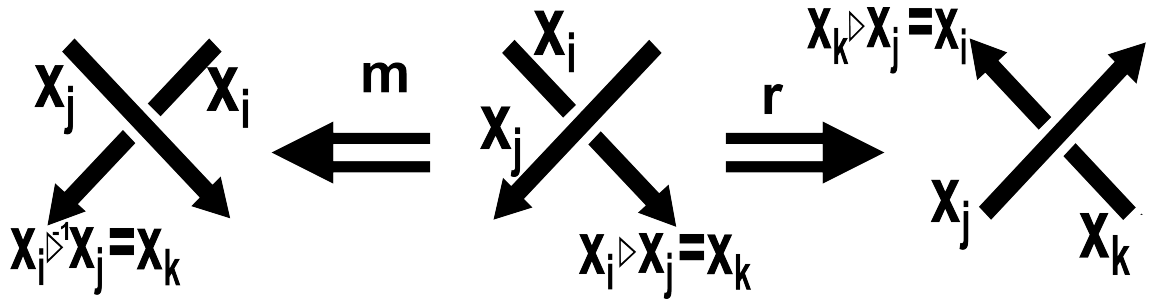
$$Col_X(K) = Col_X(r(m(K))).$$



Slika 53: Prva točka izreka.

Tako vzel $r(K)$ kot vzel $(m(K))$ imata v križišču, dobljenem iz prvotnega enačbo $x_i \triangleright^{-1} x_j = x_k$ oz. $x_k \triangleright x_j = x_i$ (slika 54). Ker to velja za vsako križišče, imata za izračun števila barvanj s kvandlom X enak sistem enačb in torej velja

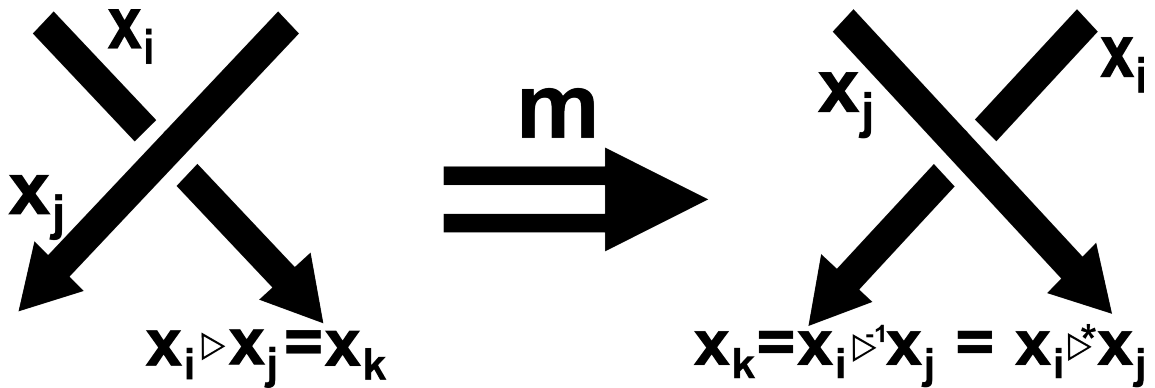
$$Col_X(r(K)) = Col_X(m(K)).$$



Slika 54: Druga točka izreka.

Vozel $m(K)$ ima v križišču, dobljenem iz prvotnega enačbo $x_k = x_i \triangleright^{-1} x_j$, kar je ravno enačba $x_k = x_i \triangleright^* x_j$ za operacijo $\triangleright^*$ dualnega kvandla X^* kvandlu X (slika 55). Ker to velja v vsakem križišču, je

$$Col_X(K) = Col_{X^*}(m(K)).$$



Slika 55: Tretja točka izreka.

□

4.4 Fundamentalni kvandel vozla

Poleg barvanja lahko vsakemu vozlu priredimo fundamentalni kvandel.

Definicija 4.13. *Fundamentalni kvandel vozla K je kvandel X :*

$$\begin{aligned} X &:= \{\text{loki na diagramu}\} \cup \{x_{a,b} | x_{a,b} = a \triangleright b; \ a, b \in X\} \\ &= \{\text{loki na diagramu}\} \cup \{\text{izmišljeni elementi}\} \\ a \triangleright b &:= \begin{cases} a \triangleright b \text{ kot na diagramu;} & a \text{ in } b \text{ se ustrezno sekata na diagramu} \\ x_{a,b}; & \text{sicer} \end{cases} \end{aligned}$$

Gre za kvandel, ki ga generirajo elementi, ki smo jih predpisali lokom diagrama.

V praktično vseh primerih bomo dobili števno neskončno velik kvandel.

Primer 4.14. Fundamentalni kvandel deteljice na sliki 56 je $X = \{a, b, c, \dots\}$ v tabeli 3.

$\triangleright$	a	b	c	$\dots$
a	a	$?$	b	$\dots$
b	c	b	$?$	$\dots$
c	$?$	a	c	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Tabela 3: Fundamentalni kvandel deteljice.

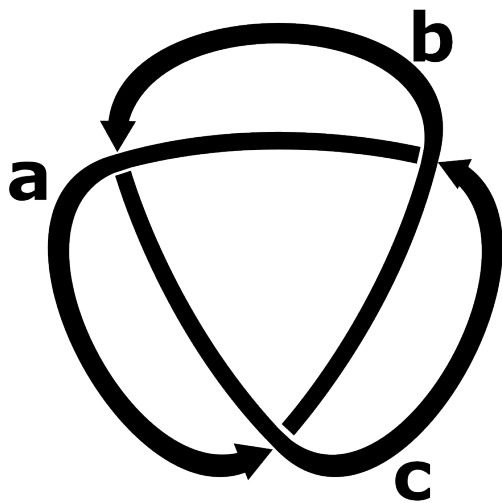
◇

Primer 4.15. Fundamentalni kvandel osmice na sliki 57 je $X = \{a, b, c, d, \dots\}$ v tabeli 4.

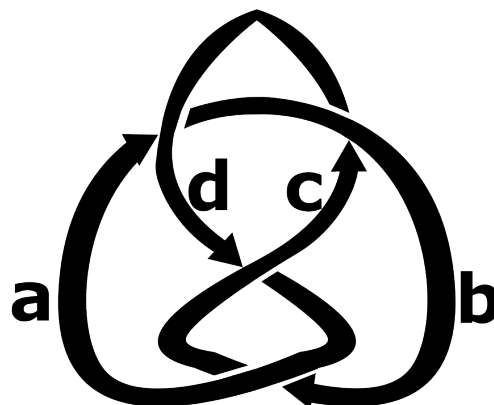
$\triangleright$	a	b	c	d	$\dots$
a	a	$?$	d	b	$\dots$
b	$?$	b	$?$	$?$	$\dots$
c	b	d	c	$?$	$\dots$
d	$?$	$?$	$?$	d	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Tabela 4: Fundamentalni kvandel osmice.

◇



Slika 56: Deteljica.



Slika 57: Osmica.

Fundamentalni kvandel vozla je zelo močna invarianta, velja namreč:

Izrek 4.16 ([3]). *Orientirana vozla sta orientirano ekvivalentna natanko tedaj, ko imata izomorfna fundamentalna kvandla.*

Izomorfizem dojemamo v algebraičnem smislu: med njima obstaja bijektiven homomorfizem.

Dokaz tega izreka žal presega vsebinske omejitve tega diplomskega dela, lahko pa ga najdemo v članku [3].

Problem pri uporabi fundamentalnega kvandla kot vozalne invariante je to, da je računsko zelo zahtevno preveriti, kdaj sta dva neskončna kvandla izomorfna. Tako se fundamentalni kvandel zelo redko uporablja kot vozalna invarianta.

Kazalo slik

1	Deteljica.	8
2	Deformacija deteljice.	9
3	Projekcija deteljice.	10
4	Diagram deteljice.	11
5	Križišče.	11
6	Deteljica z označenimi loki.	11
7	Vozel, premaknjen na ravnino z diagramom.	14
8	Prva Reidemeistrova poteza.	14
9	Druga Reidemeistrova poteza.	15
10	Tretja Reidemeistrova poteza.	15
11	Deformacije za prvo potezo.	16
12	Deformacije za drugo potezo.	16
13	Deformacije za tretjo potezo.	17
14	Razdelitev na trikotnike.	18

15	Lok brez križišča.	18
16	Prvi primer pri dokazu.	18
17	Drugi primer pri dokazu.	18
18	Orientirana deteljica.	19
19	Orientirana osmica.	19
20	Nasprotno orientirani osmici.	20
21	Zrcalna podoba osmice.	20
22	Predznaka križišč.	21
23	Povezana vsota.	21
24	Nevozel.	22
25	Tabela pravozlov.	23
26	Operacija $\triangleright_+$	24
27	Operacija $\triangleright_-$	24
28	Uskladitev s prvo potezo.	24
29	Uskladitev z drugo potezo.	25
30	Uskladitev s tretjo potezo.	25
31	Loki različnih barv.	28
32	Loki enake barve.	28
33	Tribarvanje pri prvi potezi.	29
34	Tribarvanje pri drugi potezi, prvi primer.	29
35	Tribarvanje pri drugi potezi, drugi primer.	29
36	Tribarvanje pri tretji potezi, prvi primer.	30
37	Tribarvanje pri tretji potezi, drugi primer.	30
38	Tribarvanje pri tretji potezi, tretji primer.	30
39	Primer netrivialnega barvanja vozla 6_1	31
40	Vozel 6_1 z devetimi tribarvanji.	32
41	Vozel 6_2 s tremi tribarvanji.	32
42	Prvi neznan vozel.	32
43	Drugi neznan vozel.	32
44	Pozitivno križišče.	33
45	Negativno križišče.	33
46	Barvanje s kvandli, prva poteza.	34
47	Barvanje s kvandli, druga poteza.	34
48	Barvanje s kvandli, tretja poteza.	34
49	Vozel 10_{17}	35
50	Vozel 10_{20}	35
51	Vozel 5_1	36
52	Vozel 5_2	36
53	Prva točka izreka.	37
54	Druga točka izreka.	37
55	Tretja točka izreka.	37
56	Deteljica.	39
57	Osmica.	39

Tabele

1	Kvandel $\Lambda_{5,3}$	27
2	Kvandel $\Lambda_{5,2}$	28
3	Fundamentalni kvandel deteljice.	38
4	Fundamentalni kvandel osmice.	38

Slovar strokovnih izrazov

knot vozle

vertice vozlišče

deformation deformacija

equivalence ekvivalenca

regular projection regularna projekcija

crossing križišče

arc lok

diagram diagram

Reidemeister move Reidemeistrova poteza

plane isotopy ravninska izotopija

oriented knot orientiran vozle

connected sum povezana vsota

prime knot pravozel

quandle kvandel

Alexander quandle Alexandrov kvandel

dual quandle dualni kvandel

coloring barvanje

Fox's three-colorability theorem Foxov izrek o tribarvanju

fundamental quandle fundamentalni kvandel

unknot nevozel

trefoil knot deteljica

figure eight knot osmica

Literatura

- [1] D. Austin, *Knot quandaries quelled by quandles*, [ogled 6. 8. 2023], dostopno na <http://www.ams.org/publicoutreach/feature-column/fc-2016-03>.
- [2] W. E. Clark in dr., *Quandle colorings of knots and applications*, J. Knot Theory Ramifications **23**(06) (2014) 1450035, doi: 10.1142/s0218216514500357, dostopno na <https://doi.org/10.1142/s0218216514500357>.
- [3] D. Joyce, *A classifying invariant of knots, the knot quandle*, J. Pure Appl. Algebra **23**(1) (1982) 37–65.
- [4] L. H. Kauffman, *On knots*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1987.
- [5] C. Livingstone, *Knot theory*, The Carus Mathematical Monographs, The Mathematical Association of America, Bloomington, Indiana, 1993.

